Indice

Introduzione

In questo lavoro vengono trattati i decadimenti degli stati di charmonio. Con il termine "quarkonio" si intendono, in analogia al termine positronio utilizzato per gli stati legati e^+e^-, i mesoni composti da quark e antiquark pesanti (charm o bottom) dello stesso tipo ($Q\bar{Q}$).

Lo studio del quarkonio è di importanza fondamentale per investigare le proprietà dell'interazione forte. La teoria di campo che descrive tale interazione è la cromodinamica quantistica (QCD). La massa elevata dei quark considerati consente l'utilizzazione di una teoria effettiva: la cromodinamica quantistica non relativistica (NRQCD) [1], in cui le diverse scale dinamiche m, mv, mv^2 dei processi di produzione e decadimento sono ben separate, grazie al fatto che la velocità v del quark è piccola.

Ciò permette di ricavare formalmente una fattorizzazione per le larghezze di decadimento, che sono l'argomento del nostro studio, in coefficienti perturbativi (che possono essere calcolati) e in elementi di matrice non perturbativi. A differenza di quanto accadeva nel vecchio modello di singoletto di colore (una completa analisi dei risultati ottenuti per il quarkonio nell'ambito del modello di singoletto di colore si può trovare nel lavoro di Schuler [2]), risulta naturale associare un'ampiezza non nulla per l'annichilazione di $Q\bar{Q}$ in stato di ottetto di colore; quest'ultimo compare, tra gli stati di Fock che compongono il quarkonio, assieme a gluoni e coppie quark-antiquark leggeri.

In questo modo vengono risolti alcuni problemi che si presentavano nell'ambito del modello di singoletto di colore; ad esempio, per quanto riguarda i decadimenti degli stati in onda P del charmonio, avviene una cancellazione delle divergenze infrarosse presenti nel vecchio modello.

Scopo di questo lavoro è la determinazione degli elementi di matrice non perturbativi mediante un confronto con i dati sperimentali disponibili. Ciò è necessario perchè, rispetto a precedenti lavori (ved. ad es. [3]), oggi sono disponibili le espressioni teoriche per i decadimenti all'ordine successivo al dominante (NLO) in α_s [4][5] e una maggior quantità di dati sperimentali. Gli elementi di matrice ottenuti vengono utilizzati per stimare la larghezza di decadimento inclusiva in adroni leggeri del mesone h_c (lo stato ${}^1P_1$ del charmonio).

La tesi è organizzata come segue. Nel primo capitolo viene riassunta la fenomenologia del charmonio. In esso vengono date le espressioni per le larghezze di decadimento di alcuni stati del charmonio nell'approccio del modello a singoletto di colore. Nel secondo capitolo viene illustarata la fattorizzazione NRQCD, con particolare riferimento alla sua applicazione al calcolo delle larghezze di decadimento. Il terzo capitolo contiene il calcolo di alcuni coefficienti perturbativi per le larghezze di decadimento all'ordine dominante (LO) in α_s. Inoltre mostriamo un esempio di calcolo col metodo dell'espansione in soglia. I risultati ottenuti per gli elementi di matrice e la larghezza della h_c sono presentati nel quarto capitolo. Nell'ultimo capitolo vengono presentate le conclusioni.

Capitolo 1

Il charmonio

Il quark charm venne introdotto dal punto di vista teorico nel 1970 nell'ambito del modello di Glashow-Iliopoulos-Maiani (GIM) per spiegare l'assenza, nell'interazione debole, di processi neutri con variazione di stranezza.

Nel 1974 venne scoperta una risonanza stretta a $M \simeq 3.1$ GeV da due gruppi indipendenti: a Brookhaven in reazioni del tipo [6]:

$$p + Be \to e^+ + e^- + X$$

e a SLAC all'anello di accumulazione e^+e^- nelle reazioni [7]:

$$e^+ + e^- \to e^+ + e^-$$

$$e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$$

$$e^+ + e^- \to adroni.$$

Questa risonanza venne chiamata J/ψ e fu subito interpretata come uno stato del charmonio: uno stato legato di quark e antiquark di tipo charm.

La J/ψ ha una larghezza estremamente piccola $\Gamma_{J/\psi} = 87$ keV (ved. Tabella 1.2), anche in confronto con altri mesoni vettoriali di massa molto minore: la $\rho(770)$ ha $\Gamma_\rho = 150$ MeV, la $\omega(782)$ ha $\Gamma_\omega = 8.4$ MeV. Questa caratteristica può essere interpretata mediante la regola di Zweig: essa afferma che sono favoriti i decadimenti che hanno dei diagrammi in cui le linee di quark dello stato iniziale sono connesse a quelle dello stato finale, sono soppressi i decadimenti in cui tali linee sono sconnesse.

Essendo la J/ψ al di sotto della soglia di produzione di charm aperto (questa soglia è la somma delle masse invarianti di D^+ e D^-, che sono i due

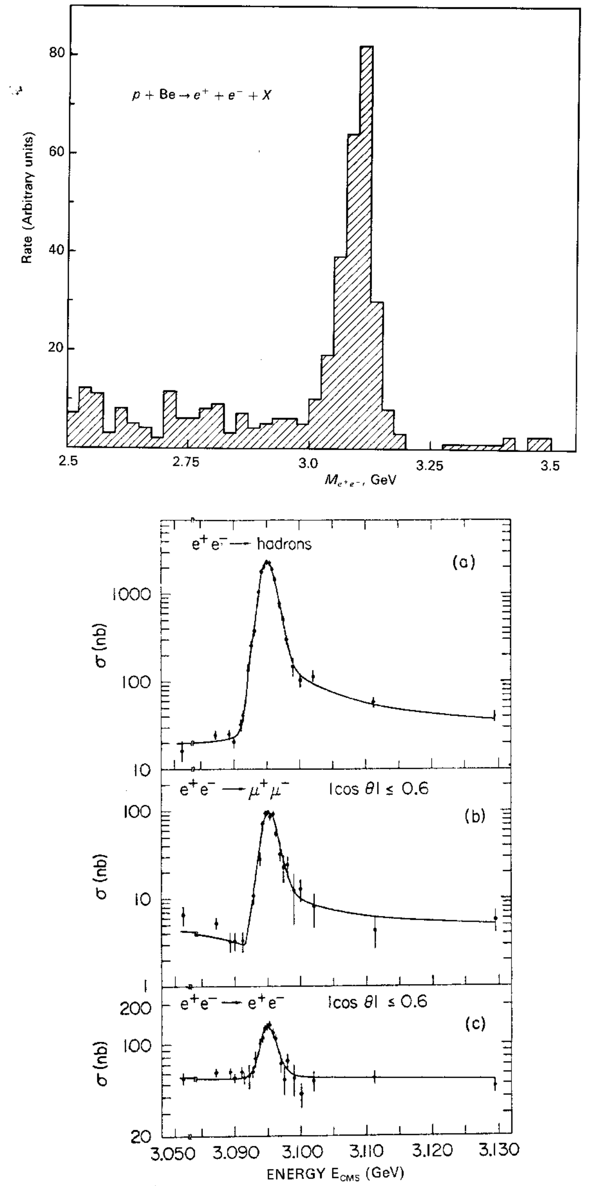


Figura 1.1: Risultato di Brookhaven (sopra) e di SLAC (sotto).

QUARK	CARICA	MASSA (MeV)
u	+2/3	1.5 to 5
d	-1/3	3 to 9
s	-1/3	60 to 170
c	+2/3	1100 to 1400
b	-1/3	4100 to 4400
t	+2/3	$\sim$ 174000

Tabella 1.1: Carica e massa dei quark [8]. La carica è espressa in unità di $|e|$; tutti hanno $J^P = 1/2^+$.

mesoni charmati più leggeri, essi hanno numero quantico di charm rispettivamente $+1$ e -1; essendo $M_D \simeq 1870$ MeV la soglia si trova a 3740 MeV) gli unici decadimenti adronici possibili sono Zweig-soppressi.

I quark conosciuti a tutt'oggi sono 6 e sono elencati in Tabella 1.1.

I primi tre della tabella vengono detti leggeri. Si considerano quark pesanti il charm e il bottom; il top è "super-pesante" nel senso che decade debolmente in tempi brevi e non fa in tempo a formare degli stati legati di toponio; per questo motivo quanto detto più avanti non può essergli applicato.

1.1 Spettro del charmonio

Dal momento della scoperta del charmonio, la spettroscopia del quarkonio è diventata un ottimo campo di prova per costruire dei modelli di potenziale per l'interazione forte, soprattutto perchè in questo ambito è giustificabile l'uso di modelli non relativistici. La velocità tipica del quark all'interno dello stato legato è infatti di $v^2 \simeq 0.3$ per il charmonio e $v^2 \simeq 0.1$ per il bottomonio.

Nel charmonio, i quark di valenza $c\bar{c}$ possono essere legati in diversi stati di momento angolare L e di spin totale S. Essi possono essere identificati usando per brevità la notazione spettroscopica $n^{2S+1}L_J$. La parità e la coniugazione di carica per ognuno di essi sono date da: $P = (-1)^{L+1}$, $C = (-1)^{L+S}$. Analogamente si può usare la notazione J^{PC}, che risulta essere particolarmente comoda poichè le tre quantità indicate sono tutte esattamente conservate nell'interazione forte ed elettromagnetica.

Il fatto che la J/ψ sia prodotta abbondantemente in annichilazioni e^+e^-

STATO	$n^{2S+1}L_J$	J^{PC}	M (MeV)	Γ (MeV)
η_c	1^1S_0	0^{-+}	2978.8 ± 2.1	$13.2^{+3.8}_{-3.2}$
η_c'	2^1S_0	0^{-+}	3594 ± 5	
J/ψ	1^3S_1	1^{--}	3096.88 ± 0.04	0.087 ± 0.005
ψ'	2^3S_1	1^{--}	3686.00 ± 0.09	0.277 ± 0.031
χ_0	1^3P_0	0^{++}	3417.3 ± 2.8	13.5 ± 5.3
χ_1	1^3P_1	1^{++}	3510.53 ± 0.12	0.88 ± 0.14
χ_2	1^3P_2	2^{++}	3556.17 ± 0.13	2.00 ± 0.18
h_c	1^1P_1	1^{+-}	3526.14 ± 0.24	< 1.1(90%C.L.)

Tabella 1.2: Numeri quantici, massa e larghezza degli stati del charmonio sotto la soglia di produzione di charm aperto [8].

lascia presupporre che essa abbia gli stessi numeri quantici del fotone ($J^{PC} = 1^{--}$) virtuale originato nell'annichilazione stessa. In generale gli stati 1^{--} sono gli unici accessibili direttamente in collisioni e^+e^-. Gli altri stati (ved. Tabella 1.2 e Figura 1.3) possono essere raggiunti a partire da questi tramite transizioni radiative (ad esempio $e^+e^- \to \psi' \to \chi_J\gamma$) oppure annichilazioni in due fotoni, che sono soppresse di un fattore $\alpha_{em} = 1/137$ rispetto a quella a singolo fotone; questo è un grosso limite per la spettroscopia con tale metodo.

La produzione mediante interazioni $p\bar{p}$ invece permette di raggiungere tutti gli stati mediante formazione diretta e quindi si rivela molto più conveniente per lo studio dell'intero spettro. È però presente un fondo molto più elevato (la sezione d'urto per $p\bar{p} \to c\bar{c}$ è ~ 1 μbarn, quella per $p\bar{p} \to had$ non risonante ~ 70 mbarn [9]). In questo caso il charmonio ha origine da un processo di annichilazione coerente dei quark di p e $\bar{p}$ in più gluoni (essi devono essere almeno due per la conservazione del colore) compatibilmente con le leggi di conservazione per J, P, C. Il fondo adronico che si ottiene in questo tipo di collisione è molto elevato a causa della quantità di canali accessibili. Un modo per ottenere un miglior rapporto segnale/fondo consiste nell'osservare gli stati di charmonio attraverso i loro decadimenti in coppie di fotoni o in leptone-antileptone:

$$p\bar{p} \to c\bar{c} \to l^+l^-, \gamma\gamma.$$

Dal punto di vista sperimentale la presenza di una risonanza è indicata dal caratteristico picco nella sezione d'urto. Questo è descritto dalla formula di Breit-Wigner. Per reazioni del tipo:

$$a + b \to R \to c + d$$

essa è [10]:

$$\sigma(E) = \frac{\pi}{k^2} \frac{(2J+1)}{(2s_a+1)(2s_b+1)} \frac{\Gamma_{ab}\Gamma_{cd}}{(M_R - E)^2 + \Gamma^2/4} \tag{1.1}$$

in cui:
E = energia (CMS) ,
$k = 1/\not\lambda$ = impulso di a e b (CMS) ,
s_a, s_b = spin di a e b ,
M_R = massa della risonanza ,
J = spin della risonanza ,
Γ = larghezza totale della risonanza ,
Γ_{ab}, Γ_{cd} = larghezze parziali dei processi $R \to ab, R \to cd$.
Si definisce "branching ratio" (BR) il rapporto tra una larghezza parziale e la larghezza totale della risonanza. Ad esempio $BR_{ab} = \frac{\Gamma_{ab}}{\Gamma}$.

1.2 Modelli di potenziale

Lo spettro di massa del charmonio è assai simile allo spettro di livelli energetici del positronio. Si può quindi cercare di costruire un potenziale non relativistico che renda conto delle masse osservate. Detto potenziale deve riprodurre i due comportamenti caratteristici degli stati legati di quark nei limiti di piccole e grandi distanze: a piccole distanze è presente un andamento del potenziale assimilabile al coulombiano:

$$V(r) \sim -\frac{4}{3}\frac{\alpha_s(r)}{r},$$

dove α_s è la costante di accoppiamento della QCD, variabile con la scala di distanze (o impulsi μ, nel qual caso si ha $\alpha_s(\mu)$ con $\mu \sim 1/r$); a piccole distanze i quark possono essere considerati liberi (libertà asintotica) poichè $\alpha_s(r) \to 0$ logaritmicamente per $r \to 0$.

La formula che esprime la variazione di $\alpha_s(\mu)$ (all'ordine dominante nelle potenze inverse di $\ln(\mu^2/\Lambda^2)$) è la seguente [10]:

$$\alpha_s(\mu) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(\mu^2/\Lambda^2)}, \tag{1.2}$$
$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f,$$

dove Λ è un parametro dimensionale che rappresenta il punto in cui l'espressione (1.2) diverge e n_f è il numero di quark con massa minore della scala di energia μ. Si vede che per μ piccoli la QCD diventa non perturbativa in quanto α_s si approssima a 1.

A grandi distanze è presente il termine di confinamento:

$$V(r) \sim kr,$$

in cui k è la costante di stringa. Questo andamento è confermato da calcoli su reticolo. Esso può essere spiegato supponendo che, quando i quark si trovano a distanza di 1 fm e oltre, le linee di forza del campo vengono confinate in un tubo di area approssimativamente costante, come mostrato in Figura 1.6. Dal fatto che la densità di energia all'interno del tubo di gluoni è costante si ricava l'andamento lineare del potenziale tra i quark.

Si ottiene, semplicemente sommando i due andamenti precedenti, il potenziale di Cornell:

$$V(r) = -\frac{4}{3}\frac{\alpha_s(r)}{r} + kr.$$

Sono stati proposti altri tipi di potenziale; ad esempio di tipo logaritmico:

$$V(r) = C\ln(r/r_0) + C_0,$$

o di tipo potenza:

$$V(r) = A + Br^{0.1}.$$

Essi danno risultati che sono indistinguibili nell'intervallo di distanze tipico dei sistemi legati del quarkonio ($r \simeq 0.1 - 1$ fm).

Chiaramente, per spiegare le masse delle particelle appartenenti ad uno stesso multipletto di spin, c'è bisogno di termini aggiuntivi del potenziale dipendenti da S e L. Tali effetti dipendono anche dal fatto che il potenziale sia di tipo vettoriale $V_V(r)$, dovuto allo scambio di una singola particella vettoriale come il gluone, ovvero di tipo scalare $V_S(r)$, dovuto a fenomeni collettivi a più gluoni. Si hanno, al primo ordine perturbativo, i seguenti termini [11]:

1. **spin-spin:** questo termine è responsabile dello splitting tra il termine di singoletto e quello di tripletto di spin:

   $$V_{SS}(\mathbf{r}) = \frac{\boldsymbol{\sigma_1} \cdot \boldsymbol{\sigma_2}}{6m^2}\nabla^2 V_V(r),$$

   il valore di aspettazione di $\boldsymbol{\sigma_1} \cdot \boldsymbol{\sigma_2}$ è $+1$ per $S = 1$ e -3 per $S = 0$.

2. **spin-orbita:** questo termine causa la separazione degli stati con lo stesso L, a seconda del valore di aspettazione $\langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \rangle$:

$$V_{LS}(\mathbf{r}) = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}) \left(3\frac{dV_V}{dr} - \frac{dV_S}{dr} \right) /(2m^2 r).$$

3. **tensoriale:** un ultimo termine contiene, in analogia a quanto presente in elettrodinamica, gli effetti tensoriali del potenziale vettoriale:

$$V_{tens}(\mathbf{r}) = \frac{S_{12}}{12m^2} \left(\frac{1}{r}\frac{dV_V}{dr} - \frac{dV_V^2}{dr^2} \right),$$

$$S_{12} = 2[3(\mathbf{S} \cdot \widehat{\mathbf{r}})(\mathbf{S} \cdot \widehat{\mathbf{r}}) - S^2].$$

I parametri sono da adattare ai dati sperimentali in modo da riprodurre le masse e le larghezze delle risonanze. Non esiste una teoria attraverso la quale essi possano essere calcolati.

1.3 Decadimenti

L'approccio ai decadimenti utilizzato in questo paragrafo rientra nell'ambito del modello di singoletto di colore. Esso è un'approssimazione ma vale la pena di soffermarsi sui risultati sia per capire dove tale modello fallisce sia perchè alcuni di essi verranno utilizzati nel seguito in una forma leggermente modificata.

I decadimenti del charmonio possono avvenire principalmente in tre modi distinti:

1. **decadimenti elettromagnetici:** si ha decadimento elettromagnetico quando la particella si annichila in uno o più fotoni (che possono dare origine a leptoni nello stato finale). In quanto segue $e_c = +2/3$ è la carica del quark charm in unità di $|e|$ e la funzione d'onda di Schrödinger del charmonio è espressa come prodotto di parte angolare e radiale: $\Psi(r) = Y_{lm}(\theta, \phi)R_{nl}(r)$. Le ampiezze di annichilazione possono essere fattorizzate in due parti: una che dà la probabilità di trovare la coppia $Q\bar{Q}$ ad una distanza tale che l'annichilazione possa aver luogo, esprimibile attraverso le funzioni d'onda (e le loro derivate) calcolate nell'origine; un'altra calcolabile perturbativamente in QED. Questi processi sono calcolati all'ordine dominante elettromagnetico, con una correzione dovuta all'interazione forte. Alcuni esempi sono [12]:

- decadimento in leptone-antileptone. Esso è possibile unicamente per gli stati che possiedono gli stessi numeri quantici del fotone, ovvero le $^3S_1$. Ovviamente nello stato finale compaiono due leptoni. Per il calcolo della larghezza di decadimento si utilizza la formula di Van Royen-Weisskopf [13] corretta al primo ordine in α_s:

$$\Gamma(J/\psi \to e^+e^-) = 16\pi\alpha^2 e_c^2 \frac{|\Psi(0)|^2}{M^2} \, (1 - 16\alpha_s/3\pi), \tag{1.3}$$

  $M = 2m_c$ è la massa dello stato del charmonio. Si noti che la correzione vale $\sim 1/2$; essa non è piccola pertanto non si può affermare che le correzioni di ordine successivo in α_s siano trascurabili.

- decadimento in due fotoni. Esso è vietato per gli stati $J = 1$ a causa del teorema di Yang [14] (ved. Appendice B). Per la conservazione di C gli stati con L=0 devono essere in singoletto di spin; gli stati con L=1 in tripletto di spin.

$$\Gamma(\eta_c \to \gamma\gamma) = 12\pi\alpha^2 e_c^4 \frac{|\Psi(0)|^2}{m_c^2} \, (1 - 3.4\alpha_s/\pi), \tag{1.4}$$

$$\Gamma(\chi_{c0} \to \gamma\gamma) = 27\alpha^2 e_c^4 \frac{|R'(0)|^2}{m_c^4} \, (1 + 0.2\alpha_s/\pi), \tag{1.5}$$

$$\Gamma(\chi_{c2} \to \gamma\gamma) = 36\alpha^2 e_c^4 \frac{|R'(0)|^2}{5m_c^4} \, (1 - 16\alpha_s/3\pi); \tag{1.6}$$

- decadimento in tre fotoni. Gli stati che non possono decadere in $\gamma\gamma$ possono decadere, all'ordine successivo in α, in tre fotoni.

$$\Gamma(J/\psi \to \gamma\gamma\gamma) = 16(\pi^2 - 9)\alpha^3 e_c^6 \frac{|\Psi(0)|^2}{3m_c^2}(1 - 12.6\alpha_s/\pi); \tag{1.7}$$

2. **decadimenti adronici:** questo tipo di decadimento si ha quando la coppia si annichila in due o più gluoni e/o in quark leggeri. Si suppone che sia possibile una generalizzazione all'interazione forte della fattorizzazione utilizzata nel caso dei decadimenti elettromagnetici. Si ottengono pertanto espressioni del tipo:

$$\Gamma((c\bar{c})_{nl} \to adr.) \propto |\frac{d^l}{dr^l}\Psi_{nl}(0)|^2 F(\alpha_s),$$

   in cui $F(\alpha_s)$ è una serie di potenze in α_s e n, l sono i numeri quantici principale e orbitale dello stato. Il calcolo si esegue per il decadimento in gluoni, si suppone che in seguito essi adronizzino con probabilità unitaria.

- decadimento in due gluoni. È possibile per gli stessi stati che decadono in due fotoni. È fortemente privilegiato rispetto al decadimento in due fotoni a causa dell'elevata costante di accoppiamento.

$$\Gamma(\eta_c \to gg) = 8\pi\alpha_s^2 \frac{|\Psi(0)|^2}{3m_c^2}\,(1+4.8\alpha_s/\pi), \tag{1.8}$$

$$\Gamma(\chi_{c0} \to gg) = 6\alpha_s^2 \frac{|R'(0)|^2}{m_c^4}\,(1+9.5\alpha_s/\pi), \tag{1.9}$$

$$\Gamma(\chi_{c2} \to gg) = 8\alpha_s^2 \frac{|R'(0)|^2}{5m_c^4}\,(1-2.2\alpha_s/\pi); \tag{1.10}$$

- decadimento in tre gluoni. È il decadimento adronico favorito per gli stati che non decadono in gg; essi sono fondamentalmente gli stati con J=1 (per il teorema di Yang) e gli stati con C=-1 (conservazione della C-parità). L'esempio tipico è la J/ψ:

$$\Gamma(J/\psi \to ggg) = 40(\pi^2-9)\alpha_s^3 \frac{|\Psi(0)|^2}{81m_c^2}\,(1-3.7\alpha_s/3\pi). \tag{1.11}$$

Per gli stati in onda P questo tipo di calcolo porta a delle divergenze logaritmche IR all'ordine α_s^3 (ovvero all'ordine dominante per χ_1 e h_c). Le ampiezze calcolate [12] inserendo dei cutoff infrarossi non sono soddisfacenti. Questo è un punto importante, su cui torneremo nel seguito.

3. **transizioni radiative:** questi sono i processi in cui si ha la transizione da uno stato ad un altro tramite l'emissione di un fotone. Valgono le usuali regole di selezione per le transizioni elettromagnetiche: per le transizioni di dipolo elettrico $\Delta L = \pm 1$, $\Delta S = 0$; per quelle di dipolo magnetico $\Delta S = \pm 1$, $\Delta L = 0$. Nell'approssimazione di dipolo si ottiene per le prime [11]:

$$\Gamma_{dip.elet.} = \frac{4\alpha e_c^2 E_\gamma^3}{27}(2J_f+1)|\langle f|r|i\rangle|^2 \mathcal{S}_{if}, \tag{1.12}$$

dove E_γ è l'energia del fotone emesso, J_f lo spin dello stato finale, $\langle f|r|i\rangle = \int_0^\infty r^2 dr R_f(r) r R_i(r)$ l'elemento di matrice della transizione di dipolo elettrico, $\mathcal{S}_{if}$ vale 3 (1) se la transizione avviene tra singoletti (tripletti) di spin. Per le transizioni di dipolo magnetico si ha:

$$\Gamma_{dip.magn.} = 4\alpha e_c^2 E_\gamma^3 (2J_f+1)|\langle f|j_0(E_\gamma r/2)|i\rangle|^2/3m_c^2,$$

dove j_0 è la funzione di Bessel sferica.

Analizziamo un po' più in dettaglio le transizioni di dipolo elettrico degli stati P per ottenere un risultato che sarà utile nel seguito. Esaminiamo in particolare una transizione da uno stato con $L = 1$ ad uno con $L = 0$ ($\Delta S = 0$). Mediante la semplice applicazione della (1.12) risulta chiaro che:

$$\frac{\Gamma(P \to S)}{\Gamma(P' \to S')} = \frac{E_\gamma^3 (2J_f + 1)\mathcal{S}_{if}}{E_\gamma'^3 (2J_f' + 1)\mathcal{S}'_{if}}.$$

In tal modo si ottiene una stima della larghezza radiativa dell'h_c:

$$\Gamma(h_c \to \eta_c \gamma) = \frac{E^3_{\gamma,h_c}}{E^3_{\gamma,\chi_J}} \Gamma(\chi_J \to J/\psi\gamma). \tag{1.13}$$

I risultati ottenuti per $J = 0, 1, 2$ sono consistenti tra loro e sono riassunti nella Tabella 1.3. Gli errori derivano direttamente da quelli

TRANSIZ.	E_γ (MeV)	$\Gamma(h_c \to \eta_c\gamma)$ (MeV)
$\chi_0 \to J/\psi\gamma$	320.4 ± 2.8	0.44 ± 0.21
$\chi_1 \to J/\psi\gamma$	413.65 ± 0.13	0.56 ± 0.10
$\chi_2 \to J/\psi\gamma$	459.29 ± 0.14	0.46 ± 0.06
$h_c \to \eta_c\gamma$	547.3 ± 1.9	

Tabella 1.3: Energia dei fotoni emessi nelle transizioni di dipolo $P \to S$ e relative stime per $\Gamma(h_c \to \eta_c\gamma)$.

sperimentali sulle $\Gamma(\chi_J \to J/\psi\gamma)$.

Utilizzeremo nel seguito, come stima del decadimento radiativo del mesone h_c, la media pesata dei valori in Tabella 1.3.

$$\Gamma(h_c \to \eta_c\gamma) = 0.48 \pm 0.05 \text{ MeV}$$

1.4 Il fallimento del modello a singoletto di colore

Nel modello a singoletto di colore si assume che un qualsiasi stato di quarkonio possa essere prodotto e possa decadere solo se in singoletto di colore.

Se $Q\bar{Q}$ sono in un differente stato di colore le ampiezze dei relativi processi vengono semplicemente poste pari a zero.

Questo modello ha avuto un'importanza fondamentale per il calcolo di sezioni d'urto e larghezze di decadimento ma fallisce sia nella determinazione delle sezioni d'urto di produzione del charmonio ad elevato impulso trasverso p_T (una buona analisi del problema si trova in [15]) sia nelle larghezze di decadimento degli stati in onda P. In quest'ultimo caso infatti le correzioni radiative contengono dei termini, associati al decadimento in $q\bar{q}g$, che presentano singolarità logaritmiche quando il 4-momento del gluone tende a zero [12]. Il problema veniva risolto imponendo un limite infrarosso all'energia del gluone, senza però che esista alcuna buona giustificazione teorica. Per di più il modello a singoletto di colore non ha alcuna solida base teorica.

Questi problemi si risolvono utilizzando una fattorizzazione basata sull'approssimazione non relativistica della QCD, che viene illustrata nel prossimo capitolo.

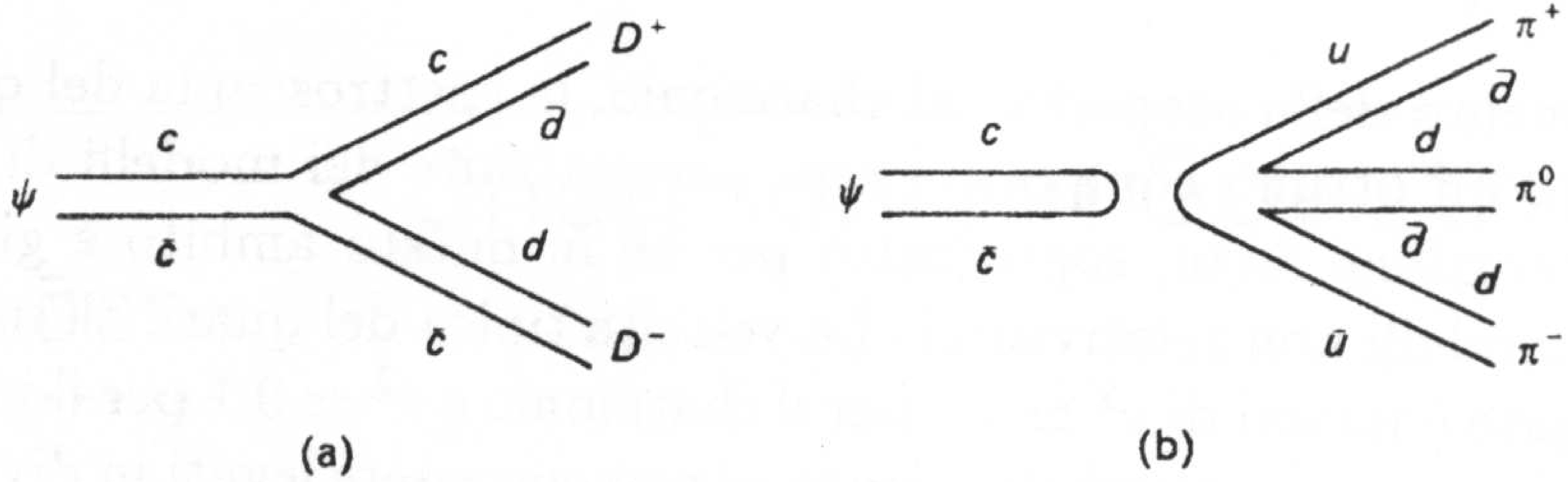


Figura 1.2: (a) decadimento Zweig-favorito: nel caso della J/ψ esso è vietato dalla conservazione dell'energia; (b) decadimento Zweig-soppresso.

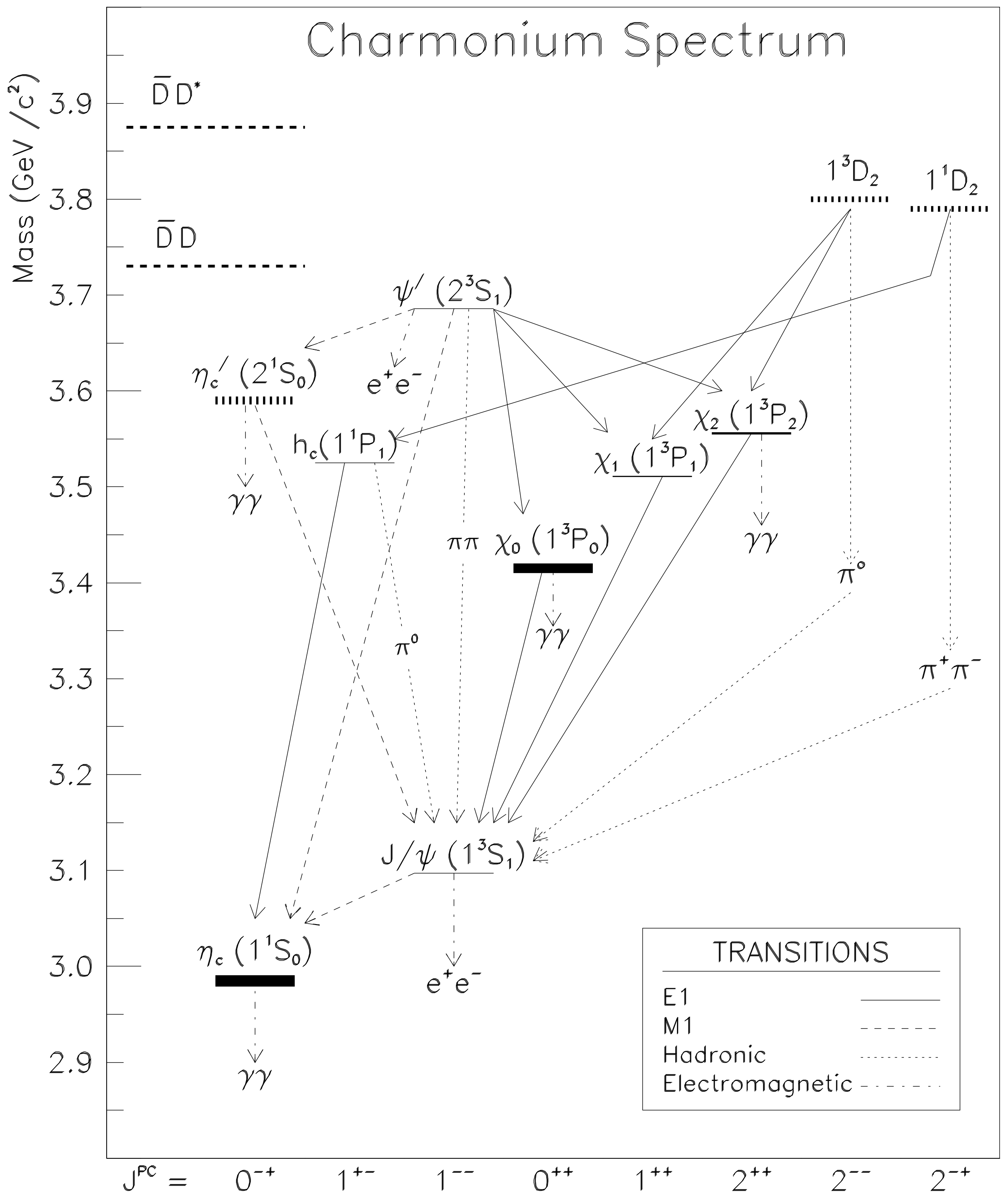


Figura 1.3: Spettro del charmonio.

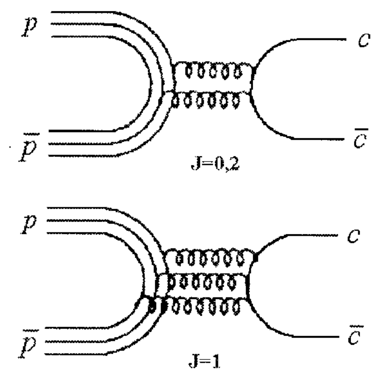


Figura 1.4: Formazione di charmonio per annichilazione coerente dei quark di p e $\bar{p}$.

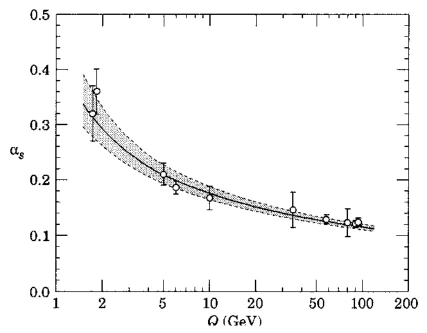


Figura 1.5: Andamento di $\alpha_s(\mu)$.

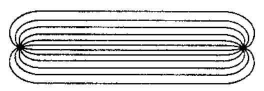


Figura 1.6: Rappresentazione del tubo di gluoni.

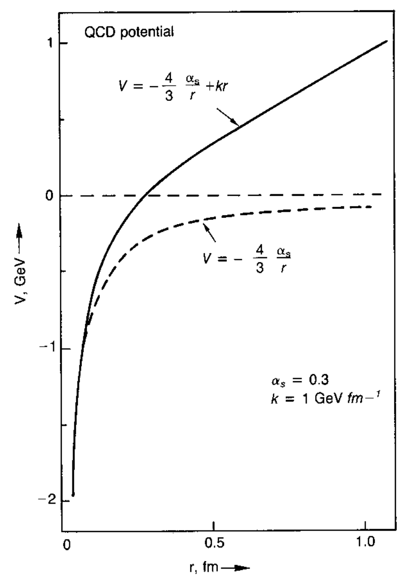


Figura 1.7: Potenziale di Cornell.

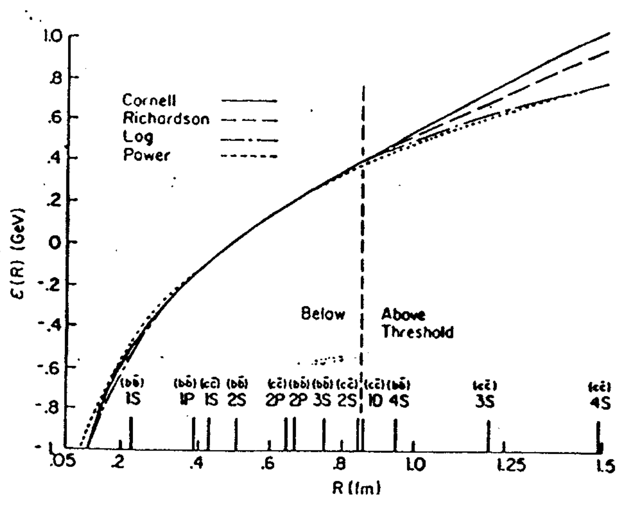


Figura 1.8: Confronto tra diversi tipi di potenziale nella regione di distanze rilevante per il quarkonio.

Capitolo 2

NRQCD e fattorizzazione

Come visto in precedenza il modello a singoletto di colore fallisce nella determinazione delle larhezze di decadimento, soprattutto per quanto riguarda gli stati in onda P. Per poter fare delle previsioni riguardo questi stati ci serviamo di una approssimazione non relativistica della QCD, sviluppata da Bodwin, Braaten, Lepage [1], che ora analizziamo.

2.1 Scale di energia e NRQCD

Nell'analisi del quarkonio, dove la massa del quark m_q è sufficientemente elevata da poter considerare la velocità v del quark come un parametro perturbativo, ci sono diverse scale di momento che giocano un ruolo importante nella dinamica. Queste sono essenzialmente la massa del quark m_q, il tipico 3-momento $m_q v$, la tipica energia cinetica $m_q v^2$. Si assume in quanto segue che le tre scale siano ben separate: $(m_q v^2)^2 \ll (m_q v)^2 \ll m_q^2$. I modelli di potenziale indicano dei valori di $v^2 \simeq 0.3$ per il charmonio e $v^2 \simeq 0.1$ per il bottomonio [1], pertanto la teoria è buona per quest'ultimo e accettabile per il primo[1]. Un'altra scala importante nella fisica del quarkonio è la Λ_{QCD}, cioè la scala associata agli effetti non perturbativi che si hanno trattando quark leggeri e gluoni. Anche $\alpha_s(m_q)$ può essere considerato un parametro perturbativo: $\alpha_s(m_q) \ll 1$ è una buona approssimazione per il bottomonio, per il quale $\alpha_s(m_b) \simeq 0.18$, e ragionevole per il charmonio, che presenta $\alpha_s(m_c) \simeq 0.24$. Ciò consente di ottenere una doppia espansione in $\alpha_s(m_q)$ e v.

Il teorema del viriale può essere utilizzato per stimare la velocità del

[1]La scala di lunghezze a cui avviene l'annichilazione è la lunghezza Compton $\lambda_C = 1/m$, per il quark charm ($m_c = 1.5$ Gev) essa vale $\lambda = 0.13$ fm. La scala tipica della dimensione del charmonio è data da $1/m_c v = 0.24$ fm.

quark: l'energia cinetica è $m_q v^2/2$, quella potenziale $-(4/3)\alpha_s(m_q v)/r$, pertanto:

$$m_q v^2 \simeq \frac{\alpha_s}{r}.$$

Fissando la dimensione tipica del quarkonio $r \sim (m_q v)^{-1}$ si ottiene $v \sim \alpha_s(m_q v)$.

Il formalismo più adeguato per la trattazione del problema è la cromodinamica quantistica non relativistica (NRQCD), una teoria effettiva in cui i quark leggeri e i gluoni vengono descritti da una lagrangiana di QCD relativistica mentre i quark pesanti sono descritti da una lagrangiana di Schrödinger non relativistica. Essa è costruita in modo che: (a) sia valida nella descrizione di processi in cui siano presenti solo impulsi non relativistici sulle linee esterne e nei loop; (b) riproduca l'andamento della QCD a bassi impulsi a qualsiasi ordine desiderato.

La lagrangiana ha la forma seguente:

$$\mathcal{L}_{NRQCD} = \mathcal{L}_{light} + \mathcal{L}_{heavy} + \delta\mathcal{L}. \tag{2.1}$$

La parte light descrive i gluoni e gli n_f quark leggeri:

$$\mathcal{L}_{light} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \sum \bar{q}\, \not{D} q, \tag{2.2}$$

dove $G^{\mu\nu}$ è il tensore di campo del gluone ($G^{\mu\nu} = \partial^\mu B_a^\nu - \partial^\nu B_a^\mu + g\sum f_{abc} B_b^\mu B_c^\nu$), q è lo spinore di Dirac per un campo di quark leggeri, $D^\mu = \partial^\mu + igA^\mu$ è la derivata covariante ($A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ è il campo di gauge a valori matriciali in SU(3) ed è sottintesa la somma sul colore $A^\mu = \sum B_a^\mu T^a$).

I quark e antiquark pesanti sono descritti da:

$$\mathcal{L}_{heavy} = \psi^\dagger(iD_t + \frac{\mathbf{D}^2}{2m_q})\psi + \chi^\dagger(iD_t + \frac{\mathbf{D}^2}{2m_q})\chi, \tag{2.3}$$

dove ψ distrugge il quark pesante, χ crea un antiquark pesante.

Gli effetti relativistici della QCD vengono riprodotti mediante il termine $\delta\mathcal{L}$. Per comodità esso è separato in due parti: la prima, bilineare, descrive l'interazione dei quark con il campo dei gluoni; la seconda, quadrilineare, è quella che ci interessa poichè descrive la fisica dell'annichilazione.

La parte bilineare nei campi, che non sarà utilizzata nel seguito, è la seguente:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_{bil} &= \frac{c_1}{8m_q^3}(\psi^\dagger(\mathbf{D}^2)^2\psi - \chi^\dagger(\mathbf{D}^2)^2\chi) \\
&+ \frac{c_2}{8m_q^2}(\psi^\dagger(\mathbf{D}\cdot g\mathbf{E} - g\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})\psi + \chi^\dagger(\mathbf{D}\cdot g\mathbf{E} - g\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})\chi) \\
&+ \frac{c_3}{8m_q^2}(\psi^\dagger(\mathbf{D}\times g\mathbf{E} - g\mathbf{E}\times i\mathbf{D})\cdot\boldsymbol{\sigma}\psi + \chi^\dagger(\mathbf{D}\times g\mathbf{E} - g\mathbf{E}\times i\mathbf{D})\cdot\boldsymbol{\sigma}\chi) \\
&+ \frac{c_4}{2m_q}(\psi^\dagger(g\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\sigma})\psi - \chi^\dagger(g\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\sigma})\chi), \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

con $E^i = G^{0i}$ e $B^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}G^{jk}$ i le componenti cromoelettriche e cromomagnetiche del tensore dei campo dei gluoni $G^{\mu\nu}$.

L'effetto dell'annichilazione si ottiene aggiungendo alla lagrangiana dei termini contenenti gli operatori $\mathcal{O}_n$ di interazione puntiforme a 4 fermioni. Tali termini hanno la forma generale:

$$\delta\mathcal{L}_{4-ferm.} = \sum_n \frac{f_n(\Lambda)}{m_q^{d_n-4}}\mathcal{O}_n(\Lambda), \qquad (2.5)$$

in cui d_n indica la dimensione in energia dell'operatore $\mathcal{O}_n$.

I coefficienti dipendono dal cutoff ultravioletto della teoria Λ, come pure gli operatori; le due dipendenze però si debbono compensare in modo che il risultato finale sia indipendente da scale arbitrarie.

Questo è un risultato centrale poichè esprime la fattorizzazione della lagrangiana in operatori non relativistici (interazione a grande distanza), che sono non perturbativi, e in coefficienti di breve distanza, calcolabili attraverso un confronto con la QCD come vedremo nel seguito. Ciò ha una grande utilità formale perchè permette di separare la fisica dei grandi impulsi trasferiti (hard), che si sa calcolare, da quella a piccoli impulsi (soft).

A questo punto si deve aggiungere un ingrediente: la fisica dell'annichilazione può avvenire sia partendo dallo stato $Q\bar{Q}$ in singoletto di colore, sia da uno stato in cui $Q\bar{Q}$ prima di annichilare emettono dei gluoni ultra-soffici ($k \to 0$) rimanendo pertanto in un differente stato di colore. Consideriamo ad esempio l'emissione di un singolo gluone: la coppia di quark deve rimanere in uno stato di ottetto di colore.

Nella teoria di singoletto di colore tale coppia non potrebbe decadere in gluoni. In effetti nella teoria sviluppata finora non vi è nessun motivo per cui ciò non possa accadere. Gli operatori $\mathcal{O}$ allora devono anche contenere l'interazione tra quark in ottetto di colore. Detti $\mathcal{O}$ possono essere espressi come somma di due termini: uno per il singoletto di colore, l'altro per l'ottetto: $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_8$. In particolare risulta più naturale [4] utilizzare una

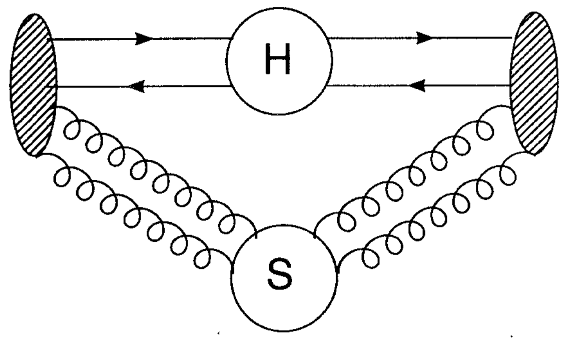


Figura 2.1: Schema della fattorizzazione. L'ovale tratteggiato rappresenta lo stato di charmonio.

decomposizione in cui nei termini di singoletto è compreso un fattore $1/2N_c$, che non c'è nei termini di ottetto.

Esplicitamente si ottiene per i termini con $d_n = 6$:

$$\begin{aligned}(\delta\mathcal{L}_{4-ferm.})_{d=6} &= \frac{f_1(^1S_0)}{m_q^2}\mathcal{O}_1(^1S_0) + \frac{f_1(^3S_1)}{m_q^2}\mathcal{O}_1(^3S_1) \\ &+ \frac{f_8(^1S_0)}{m_q^2}\mathcal{O}_8(^1S_0) + \frac{f_8(^3S_1)}{m_q^2}\mathcal{O}_8(^3S_1), \qquad (2.6)\end{aligned}$$

e gli operatori di dimensione 6 sono:

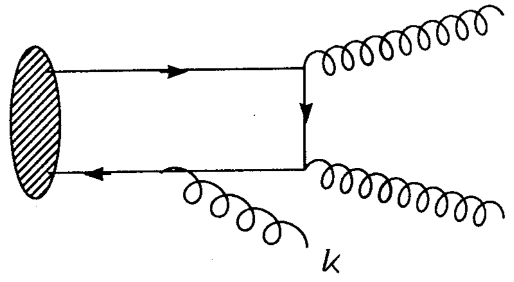
$$\mathcal{O}_1(^1S_0) = \frac{\psi^\dagger\chi\chi^\dagger\psi}{2N_c}, \qquad (2.7)$$

$$\mathcal{O}_1(^3S_1) = \frac{\psi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\chi\cdot\chi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\psi}{2N_c}, \qquad (2.8)$$

$$\mathcal{O}_8(^1S_0) = \psi^\dagger T^a\chi\chi^\dagger T^a\psi, \qquad (2.9)$$

$$\mathcal{O}_8(^3S_1) = \psi^\dagger\boldsymbol{\sigma}T^a\chi\cdot\chi^\dagger\boldsymbol{\sigma}T^a\psi. \qquad (2.10)$$

Qui gli indici 1 e 8 degli operatori identificano le componenti di singoletto e ottetto di colore.



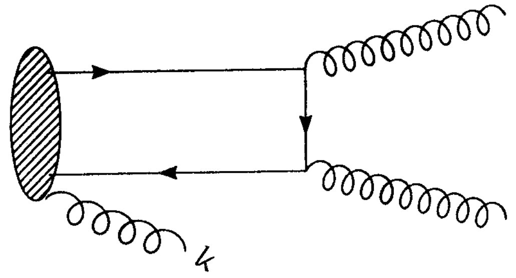


Figura 2.2: Decadimento in tre gluoni (a). Se $k \to 0$ si ha emissione di un gluone ultra-soffice e la coppia di quark si annichila a partire da uno stato di ottetto di colore (b).

Per i termini con $d_n = 8$ si ha:

$$\begin{aligned}
(\delta\mathcal{L}_{4-ferm.})_{d=8} &= \frac{f_1(^1P_1)}{m_q^4}\mathcal{O}_1(^1P_1) + \frac{f_1(^3P_0)}{m_q^4}\mathcal{O}_1(^3P_0) \\
&+ \frac{f_1(^3P_1)}{m_q^4}\mathcal{O}_1(^3P_1) + \frac{f_1(^3P_2)}{m_q^4}\mathcal{O}_1(^3P_2) + \frac{g_1(^1S_0)}{m_q^4}\mathcal{P}_1(^1S_0) \\
&+ \frac{g_1(^3S_1)}{m_q^4}\mathcal{P}_1(^3S_1) + \frac{g_1(^3S_1,{}^3D_1)}{m_q^4}\mathcal{P}_1(^3S_1,{}^3D_1) \\
&+ \frac{f_8(^1P_1)}{m_q^4}\mathcal{O}_8(^1P_1) + \frac{f_8(^3P_0)}{m_q^4}\mathcal{O}_8(^3P_0) \\
&+ \frac{f_8(^3P_1)}{m_q^4}\mathcal{O}_8(^3P_1) + \frac{f_8(^3P_2)}{m_q^4}\mathcal{O}_8(^3P_2) + \frac{g_8(^1S_0)}{m_q^4}\mathcal{P}_8(^1S_0) \\
&+ \frac{g_8(^3S_1)}{m_q^4}\mathcal{P}_8(^3S_1) + \frac{g_8(^3S_1,{}^3D_1)}{m_q^4}\mathcal{P}_8(^3S_1,{}^3D_1), \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

con gli operatori di dimensione 8:

$$\mathcal{O}_1(^1P_1) = \frac{\psi^\dagger(-i/2\overleftrightarrow{\mathbf{D}})\chi\cdot\chi^\dagger(-i/2\overleftrightarrow{\mathbf{D}})\psi}{2N_c} \tag{2.12}$$

$$\mathcal{O}_1(^3P_0) = \frac{1}{3}\frac{\psi^\dagger(-i/2\overleftrightarrow{\mathbf{D}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\chi\chi^\dagger(-i/2\overleftrightarrow{\mathbf{D}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\psi}{2N_c} \tag{2.13}$$

$$\mathcal{O}_1(^3P_1) = \frac{1}{2}\frac{\psi^\dagger(-i/2\overleftrightarrow{\mathbf{D}}\times\boldsymbol{\sigma})\chi\cdot\chi^\dagger(-i/2\overleftrightarrow{\mathbf{D}}\times\boldsymbol{\sigma})\psi}{2N_c} \tag{2.14}$$

$$\mathcal{O}_1(^3P_2) = \frac{\psi^\dagger(-i/2\overleftrightarrow{D}^i\sigma^j)\chi\chi^\dagger(-i/2\overleftrightarrow{D}^i\sigma^j)\psi}{2N_c} \tag{2.15}$$

$$\mathcal{P}_1(^1S_0) = \frac{1}{2}\frac{(\psi^\dagger\chi\chi^\dagger(-i/2\overleftrightarrow{\mathbf{D}})^2\psi + h.c.)}{2N_c} \tag{2.16}$$

$$\mathcal{P}_1(^3S_1) = \frac{1}{2}\frac{(\psi^\dagger\boldsymbol{\sigma}\chi\cdot\chi^\dagger\boldsymbol{\sigma}(-i/2\overleftrightarrow{\mathbf{D}})^2\psi + h.c.)}{2N_c} \tag{2.17}$$

$$\mathcal{P}_1(^3S_1,{}^3D_1) = \frac{1}{2}\frac{(\psi^\dagger\sigma^i\chi\cdot\chi^\dagger\sigma^j(-i/2)^2\overleftrightarrow{D}^i\overleftrightarrow{D}^j\psi + h.c.)}{2N_c}, \tag{2.18}$$

in (2.11) gli operatori di ottetto $\mathcal{O}_8$ o $\mathcal{P}_8$ si ottengono in corrispondenza di ogni operatore di singoletto inserendo una matrice di colore T^a tra $\psi^\dagger$ e χ e tra $\chi^\dagger$ e ψ e in cui è assente il termine $2N_c$ a denominatore. Il simbolo $\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$ è una notazione abbreviata per $\chi^\dagger\overleftrightarrow{\mathbf{D}}\psi \equiv \chi^\dagger(\mathbf{D}\psi) - (\mathbf{D}\chi^\dagger)\psi$; la notazione per le componenti di un tensore simmetrico a traccia nulla è $\mathrm{T}^{(ij)} = (\mathrm{T}^{ij} + \mathrm{T}^{ji})/2 - \mathrm{T}^{kk}\delta^{ij}/3$.

Il successo del modello a potenziale si basa sul fatto che l'effetto dominante dello scambio di gluoni tra quark e antiquark pesanti sia di produrre un'interazione istantanea e che la probabilità di avere gluoni dinamici all'interno del mesone sia molto bassa. In realtà esistono processi nei quali ciò non è più valido, anzi può succedere che i contributi di singoletto e ottetto di colore siano molto prossimi. Uno di questi casi è appunto l'annichilazione degli stati in onda P del charmonio, dove il modello non è applicabile. Tutto ciò risulterà più chiaro tra poco.

2.2 Analogia con l'interazione debole

Il modello di interazione debole proposto da Fermi [10] si presta ad un'analogia che permette di capire meglio che cosa stiamo facendo.

Nell'interazione debole infatti esistono diverse scale di momento tipiche del processo, utilizzando le quali è possibile effettuare delle approssimazioni e costruire una teoria effettiva in cui esse sono separate.

Prendiamo ad esempio il decadimento del neutrone

$$n \to p + e^- + \overline{\nu}_e.$$

Esso è descritto nella teoria di Fermi da un'interazione puntiforme. L'ampiezza per il processo è:

$$\mathcal{M} = J^{bar} J^{lep},$$

che descrive un vertice a 4 fermioni in cui interagiscono la corrente barionica

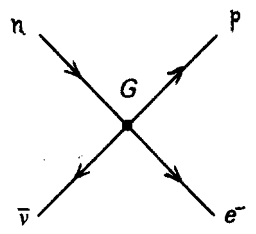


Figura 2.3: Vertice di Fermi per il decadimento del neutrone.

J^{bar} e quella adronica J^{lep}:

$$J^{bar} = \overline{\psi}_p O^{bar} \psi_n,$$

$$J^{lep} = \overline{\psi}_e O^{lep} \psi_{\overline{\nu}_e},$$

dove gli O erano operatori vettoriali (γ^μ) nella teoria originaria di Fermi, nella successiva teoria V-A sono di tipo $\gamma^\mu(1-\gamma^5)$.

Oggi sappiamo che l'interazione è di tipo più complesso: essa procede mediante lo scambio di un bosone vettoriale massivo virtuale W^-. Nella ampiezza $\mathcal{M}$ corretta deve comparire il propagatore del W^-. Inoltre neutrone e protone non sono puntiformi ma contengono ognuno 3 quark di valenza. Per questo motivo il relativo elemento di matrice non è calcolabile teoricamente partendo da principi primi, non conoscendo i dettagli dell'interazione.

Allora, nel complesso si ha:

$$-\frac{g^2}{8}\langle p|J^{bar,\mu}|n\rangle \frac{i(-g_{\mu\nu}+k_\mu k_\nu/M_W^2)}{k^2-M_W^2+i\epsilon}\langle e^-\overline{\nu}_e|\overline{u}_e\gamma^\nu(1-\gamma^5)v_\nu|0\rangle.$$

Il funzionamento del modello è dovuto al fatto che l'interazione avviene ad una scala di momenti, la massa del W^- $M_W \simeq 80$ GeV, che è molto maggiore della differenza di massa tra neutrone e protone: $m_n - m_p \simeq 1$ MeV. Essendo $k^2 \ll M_W^2$ si ottiene che l'interazione avviene in modo puntiforme, con accoppiamento costante che si può chiamare G. Conoscendo esattamente l'elemento di matrice leptonico posso ricavare, dal confronto con i dati sperimentali, l'elemento di matrice barionico non calcolabile.

2.3 Espansione in stati di Fock per il quarkonio

Come visto in precedenza l'emissione di un gluone ultra-soft è un processo puramente non perturbativo quindi va incluso nella fisica soft degli elementi di matrice.

Nella teoria che utilizziamo un generico stato del quarkonio $|H\rangle$ deve essere considerato come una sovrapposizione di diversi stati di Fock. In particolare si hanno lo stato di Fock dominante $|Q\bar{Q}\rangle$, in cui Q e $\bar{Q}$ sono in uno stato di singoletto di colore e di momento angolare $^{2S+1}L_J$ e lo stato $|Q\bar{Q}g\rangle$, in cui è presente un gluone dinamico e la coppia di quark risulta essere in uno stato di ottetto di colore e di momento angolare $^{2S'+1}L'_{J'}$. Nel seguito adotteremo la notazione $|^{2S+1}L_J^{[1]}\rangle$ per i primi e $|^{2S'+1}L'^{[8]}_{J'}g\rangle$ per i secondi. Si ha pertanto:

$$|H\rangle = c_0|^{2S+1}L_J^{[1]}\rangle + \sum c_1|^{2S'+1}L'^{[8]}_{J'}g\rangle + ...$$

I puntini indicano tutti gli altri stati di Fock, in cui oltre alla coppia $Q\bar{Q}$ pesanti sono presenti più gluoni e coppie di quark leggeri. Il momento angolare totale J, la parità P, la coniugazione di carica C sono esattamente conservati. Gli stati $|H\rangle$ possono pertanto venire identificati dai numeri quantici J^{PC}. La somma indicata si estende a tutti i valori possibili di L' e S' compatibili con queste leggi di conservazione.

Per il processo di emissione risulta utile analizzare l'importanza relativa dei diversi stati utilizzando la velocità v come parametro dell'espansione. Dal punto di vista della NRQCD l'emissione del gluone può avvenire grazie ai termini in $g\mathbf{A}$ e $g\phi$ presenti in $\delta\mathcal{L}$; la relativa probabilità per lo stato di Fock $|Q\bar{Q}g\rangle$ può essere stimata dallo shift in energia dovuto a tali termini. Ad esempio il contributo allo shift energetico del termine $ig\mathbf{A}\cdot\psi^\dagger\nabla\psi/m_q$ della lagrangiana $\mathcal{L}_{heavy}$ è [1]:

$$\Delta E = -\frac{1}{m_q}\langle H|\int d^3x ig\mathbf{A}\cdot\psi^\dagger\nabla\psi|H\rangle,$$

questo può essere visto come il prodotto della probabilità dello stato $Q\bar{Q}g$ $P_{Q\bar{Q}g}$ moltiplicata per l'energia dello stato $E_{Q\bar{Q}g}$.

Lo stato $|Q\bar{Q}g\rangle$, se la coppia rimane nello stesso stato di spin S in cui era nello stato originario $|Q\bar{Q}\rangle$ da cui deriva, ha una probabilità $P_{Q\bar{Q}g} \sim v^3$ rispetto a $|Q\bar{Q}\rangle$ se il gluone ha momento k di ordine $m_q v$; $P_{Q\bar{Q}g} \sim v^2$ per gluoni con energie basse, dell'ordine di $m_q v^2$ o minori. Se invece dopo l'emissione del gluone la coppia è nello stesso stato di momento angolare L, le probabilità sono minori perchè questa volta l'emissione è dovuta al termine $g\mathbf{B} \cdot \sigma$ che, in base alle stime precedenti, ha un ΔE che risulta essere minore di un fattore v; tali sono anche le probabilità. Allora le correzioni maggiori in v sono di ordine v^2 e derivano da stati in ottetto di colore che hanno $S' = S$ e $L' = L \pm 1$.

I contributi all'ordine v^2 sono dovuti a stati in cui sono presenti al massimo due gluoni:

$$\begin{aligned} |H\rangle &= c_0(1)|^{2S+1}L_J^{[1]}\rangle + c_1(v)|^{2S+1}L'^{[8]}_{J'}g\rangle \\ &+ c_1(v^2)|^{2S'+1}L_{J'}^{[8]}g\rangle + c_2(v^2)|^{2S+1}L''^{[1,8]}_{J''}gg\rangle + O(v^3), \end{aligned} \tag{2.19}$$

dove: $S' = S \pm 1$, $L' = L \pm 1$, $L'' = L' \pm 1$. I coefficienti dell'espansione contengono un indice che identifica il numero di gluoni presenti; tra parentesi è indicata la loro dipendenza da v. È sottintesa la somma su tutti i possibili stati di momento angolare e di spin compatibili con le leggi di conservazione, come visto precedentemente.

2.4 Decadimento del quarkonio

Per ottenere le larghezze di decadimento degli stati di quarkonio, ricordiamo innanzitutto che la larghezza di decadimento è data da -2 volte la parte immaginaria dell'energia dello stato. L'unico contributo pertanto si ha dalla parte di lagrangiana a 4 fermioni; ovvero:

$$\begin{aligned} \Gamma(H \to LH) &= 2\mathrm{Im}\langle H|\delta\mathcal{L}_{4-ferm.}|H\rangle \\ &= \sum_n \frac{2\mathrm{Im} f_n(\Lambda)}{m_q^{d_n-4}}\langle H|\mathcal{O}_n|H\rangle, \end{aligned} \tag{2.20}$$

dove LH indica un qualsiasi stato finale di adroni leggeri. Questa equazione è il risultato centrale della teoria per l'annichilazione in adroni leggeri; qui si vede chiaramente come la larghezza di decadimento possa essere espressa come somma di diversi termini, che a loro volta sono il prodotto di un coefficiente a breve distanza e di un elemento di matrice a grande distanza. I coefficienti, come vedremo in seguito, possono essere calcolati perturbativamente in α_s; per gli elementi di matrice invece ciò non è possibile.

Inoltre il quarkonio può annichilare anche in stati finali elettromagnetici, contenenti unicamente fotoni e leptoni. Tali decadimenti possono essere descritti in NRQCD mediante una ulteriore lagrangiana di interazione a 4 fermioni, che ha però l'effetto di proiettare sul vuoto QCD $|0\rangle$. La lagrangiana per il decadimento elettromagnetico ha la stessa forma della $\delta\mathcal{L}_{4-ferm.}$ precedente in cui si inserisce tra χ e $\chi^\dagger$ la proiezione sul vuoto. Inoltre, come è ovvio, non vi compaiono tutti i termini con operatori di ottetto di colore. Alla fine la larghezza di annichilazione elettromagnetica è:

$$\Gamma(H \to EM) = \sum_n \frac{2\mathrm{Im} f_{EM,n}(\Lambda)}{m_q^{d_n-4}} \langle H|\mathcal{O}_n^{EM}|H\rangle, \tag{2.21}$$

dove gli $\mathcal{O}_n^{EM}$ sono del tipo $\psi^\dagger \mathcal{K}'_n \chi|0\rangle\langle 0|\chi^\dagger \mathcal{K}_n \psi$, in cui $\mathcal{K}'_n$ e $\mathcal{K}_n$ sono prodotti di matrici di spin, polinomi nella derivata covariante $\mathbf{D}$ e la matrice identità di colore.

La dipendenza da v dei diversi contributi dell'elemento di matrice $\langle H|\mathcal{O}_n|H\rangle$ è data dalla combinazione delle dipendenze di $\mathcal{O}_n$ e $|H\rangle$. Ad esempio gli operatori di dimensione d=8 sono tutti soppressi di un ordine v^2 rispetto ai corrispondenti termini di dimensione d=6.

Nel caso di stati in onda S bastano gli operatori di singoletto per calcolare la larghezza di decadimento all'ordine v^3. Ad esempio la 1^1S_0 ($J^{PC} = 0^{-+}$) è costituita essenzialmente dagli elementi dello spazio di Fock $|^1S_0^{[1]}\rangle$ e $|^1P_1^{[8]}g\rangle$. Gli operatori che hanno valore di aspettazione non nullo sul primo stato sono $\mathcal{O}_1(^1S_0)$ e $\mathcal{P}_1(^1S_0)$ (soppresso di v^2 rispetto al primo) mentre sul secondo è $\mathcal{O}_8(^1P_1)$, che porta un fattore v^2. Allora $\langle\eta_c|\mathcal{O}_8(^1P_1)|\eta_c\rangle$ è complessivamente soppresso di v^4 rispetto a $\langle\eta_c|\mathcal{O}_1(^1S_0)|\eta_c\rangle$, mentre $\langle\eta_c|\mathcal{P}_1(^1S_0)|\eta_c\rangle$ lo è solo di v^2. Lo stesso discorso vale per la J/ψ. Si ottiene allora che all'ordine di precisione v^3 i contributi di ottetto di colore alle larghezze di decadimento sono trascurabili:

$$\begin{aligned}
\Gamma(\eta_c \to LH) &= \frac{2\mathrm{Im} f_1(^1S_0)}{m_c^2}\langle\eta_c|\mathcal{O}_1(^1S_0)|\eta_c\rangle \\
&+ \frac{2\mathrm{Im} g_1(^1S_0)}{m_c^4}\langle\eta_c|\mathcal{P}_1(^1S_0)|\eta_c\rangle + O(v^3\Gamma), \qquad (2.22)\\
\Gamma(J/\psi \to LH) &= \frac{2\mathrm{Im} f_1(^3S_1)}{m_c^2}\langle J/\psi|\mathcal{O}_1(^3S_1)|J/\psi\rangle \\
&+ \frac{2\mathrm{Im} g_1(^3S_1)}{m_c^4}\langle J/\psi|\mathcal{P}_1(^3S_1)|J/\psi\rangle + O(v^3\Gamma). \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Per calcolare le larghezze di decadimento degli stati con L=1 del charmonio (χ_{cJ} e h_c) si procede in modo analogo; questa volta però le dipendenze da v sono diverse. Consideriamo ad esempio le χ_{cJ}; per la h_c si ragiona in maniera perfettamente identica. Lo stato $|\chi_{cJ}\rangle$ consiste principalmente di un $|Q\bar{Q}\rangle$ in cui la coppia quark-antiquark è in uno stato di singoletto di colore ^3P_J ma contiene anche, con probabilità v^2, $Q\bar{Q}$ in ottetto di colore negli stati $^3S_1, ^3D_1, ^3D_2, ^3D_3$. Il primo di questi contribuisce alla larghezza di decadimento, mediante l'operatore $\mathcal{O}_8(^3S_1)$, allo stesso ordine in v del singoletto. I risultati che si ottengono sono i seguenti:

$$\begin{aligned}\Gamma(\chi_{cJ} \to LH) &= \frac{2\mathrm{Im} f_1(^3P_J)}{m_c^4}\langle\chi_{cJ}|\mathcal{O}_1(^3P_J)|\chi_{cJ}\rangle \\ &+ \frac{2\mathrm{Im} f_8(^3S_1)}{m_c^2}\langle\chi_{cJ}|\mathcal{O}_8(^3S_1)|\chi_{cJ}\rangle + O(v^2\Gamma), \qquad (2.24)\\ \Gamma(h_c \to LH) &= \frac{2\mathrm{Im} f_1(^1P_1)}{m_c^4}\langle h_c|\mathcal{O}_1(^1P_1)|h_c\rangle \\ &+ \frac{2\mathrm{Im} f_8(^1S_0)}{m_c^2}\langle h_c|\mathcal{O}_8(^1S_0)|h_c\rangle + O(v^2\Gamma). \qquad (2.25)\end{aligned}$$

Riassumendo, abbiamo visto che per il quarkonio in onda S le correzioni dovute alla parte di ottetto di colore sono piccole (ordine relativo almeno di v^4) e ciò spiega il funzionamento del modello di singoletto di colore; per le onde P ciò non è più valido.

A questo punto, perchè la teoria risulti predittiva, bisogna fare alcune considerazioni sugli elementi di matrice. Se li sviluppiamo in serie di potenze in v e li tronchiamo ad un dato ordine, basta calcolare il contributo di un numero finito di addendi. Inoltre, mediante alcune approssimazioni, essi risultano non essere tutti indipendenti.

2.4.1 Simmetria di spin

La simmetria di spin per i quark pesanti fornisce delle relazioni approssimate tra gli elementi di matrice per operatori di diverso spin ma nello stesso stato di eccitazione radiale e angolare. La sua violazione principale deriva dai termini di rotazione di spin in $\delta\mathcal{L}$ i cui effetti, come abbiamo visto, sono all'ordine relativo v^2. Pertanto è possibile affermare che:

$$\begin{aligned}\langle\psi|\mathcal{O}_1(^3S_1)|\psi\rangle &= \langle\eta_c|\mathcal{O}_1(^1S_0)|\eta_c\rangle(1+O(v^2)), \qquad (2.26)\\ \langle\psi|\mathcal{P}_1(^3S_1)|\psi\rangle &= \langle\eta_c|\mathcal{P}_1(^1S_0)|\eta_c\rangle(1+O(v^2)), \qquad (2.27)\\ \langle\chi_{cJ}|\mathcal{O}_1(^3P_J)|\chi_{cJ}\rangle &= \langle h_c|\mathcal{O}_1(^1P_1)|h_c\rangle(1+O(v^2)) \quad J=0,1,2\ , \qquad (2.28)\\ \langle\chi_{cJ}|\mathcal{O}_8(^3S_1)|\chi_{cJ}\rangle &= \langle h_c|\mathcal{O}_8(^1S_0)|h_c\rangle(1+O(v^2)) \quad J=0,1,2\ . \qquad (2.29)\end{aligned}$$

2.4.2 Approssimazione di saturazione del vuoto

È possibile utilizzare anche un'approssimazione che lega gli elementi di matrice del decadimento in adroni con quelli del decadimento elettromagnetico. Per capirla inseriamo un insieme completo di stati adronici leggeri $\sum |X\rangle\langle X|$ tra $\chi^\dagger$ e χ negli operatori a 4 fermioni e supponiamo che la somma sia saturata dallo stato a più bassa energia: il vuoto QCD $|0\rangle$. Per un generico operatore di singoletto di colore $\mathcal{O}_n = \frac{1}{2N_c}\psi^\dagger \mathcal{K}'_n \chi\chi^\dagger \mathcal{K}_n \psi$ si ha:

$$\begin{aligned} \langle H|\mathcal{O}_n|H\rangle &= \frac{1}{2N_c}\sum_X \langle H|\psi^\dagger \mathcal{K}'_n \chi|X\rangle\langle X|\chi^\dagger \mathcal{K}_n \psi|H\rangle \\ &\approx \frac{1}{2N_c}\langle H|\psi^\dagger \mathcal{K}'_n \chi|0\rangle\langle 0|\chi^\dagger \mathcal{K}_n \psi|H\rangle. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Per giustificare tale approssimazione dimostriamo che tutti gli altri stati, ad esempio quelli di più gluoni, sono soppressi da potenze di v. Consideriamo a titolo di esempio uno stato intermedio a due gluoni $|X\rangle = |gg\rangle$. L'operatore $\chi^\dagger\psi$ annichila $Q\bar{Q}$ pertanto un contributo non nullo può essere dato solo dalle componenti di Fock del tipo $|Q\bar{Q}gg\rangle$ presenti nello stato originario, che hanno probabilità dell'ordine di v^4. Uno stato intermedio di singolo gluone è proibito dalla conservazione del colore pertanto l'approssimazione vale all'ordine v^4. Per onde S:

$$\langle \eta_c|\mathcal{O}_1(^1S_0)|\eta_c\rangle = |\langle 0|\frac{\chi^\dagger\psi}{\sqrt{2N_c}}|\eta_c\rangle|^2(1+O(v^4)),$$

e così via per tutti gli operatori. Nel caso che analizziamo in dettaglio, relativo alle onde P, si ha:

$$\langle h_c|\mathcal{O}_1(^1P_1)|h_c\rangle = |\langle 0|\frac{\chi^\dagger(-i/2\overleftrightarrow{\mathbf{D}})\psi}{\sqrt{2N_c}}|h_c\rangle|^2(1+O(v^4)), \tag{2.31}$$

$$\langle \chi_{c0}|\mathcal{O}_1(^3P_0)|\chi_{c0}\rangle = \frac{1}{3}|\langle 0|\frac{\chi^\dagger(-i/2\overleftrightarrow{\mathbf{D}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\psi}{\sqrt{2N_c}}|\chi_{c0}\rangle|^2(1+O(v^4)), \tag{2.32}$$

$$\langle \chi_{c1}|\mathcal{O}_1(^3P_1)|\chi_{c1}\rangle = \frac{1}{2}|\langle 0|\frac{\chi^\dagger(-i/2\overleftrightarrow{\mathbf{D}}\times\boldsymbol{\sigma})\psi}{\sqrt{2N_c}}|\chi_{c1}\rangle|^2(1+O(v^4)), \tag{2.33}$$

$$\langle \chi_{c2}|\mathcal{O}_1(^3P_2)|\chi_{c2}\rangle = \sum_{ij}|\langle 0|\frac{\chi^\dagger(-i/2\overleftrightarrow{D}^i\sigma^j)\psi}{\sqrt{2N_c}}|\chi_{c2}\rangle|^2(1+O(v^4)) \tag{2.34}$$

La grande utilità di queste formule risiede nel fatto che permettono di ottenere delle informazioni sugli elementi di matrice di singoletto con i dati sperimentali riguardanti le ampiezze di decadimento in $\gamma\gamma$.

2.5 Il calcolo dei coefficienti perturbativi

La QCD e la NRQCD devono dare gli stessi risultati nel caso della dinamica non perturbativa a lunga distanza, poichè le due teorie devono essere equivalenti in tale limite. Allora si possono uguagliare l'ampiezza per la parte di annichilazione dell'ampiezza di scattering $\mathcal{M}(Q\bar{Q} \to Q\bar{Q})$ calcolata in QCD perturbativa e la stessa ampiezza calcolata in NRQCD mediante gli operatori $\mathcal{O}_n$, entrambe per quark on shell, per calcolare i coefficienti di breve distanza:

$$\mathcal{M}(Q\bar{Q} \to Q\bar{Q})|_{pert.QCD} = \sum_n \frac{f_n(\Lambda)}{m_c^{d_n-4}} \langle Q\bar{Q}|\mathcal{O}_n(\Lambda)|Q\bar{Q}\rangle|_{pert.NRQCD}. \quad (2.35)$$

Espandendo in serie di $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$ (indice relativo allo stato iniziale e finale) si possono identificare i coefficienti dei singoli operatori.

2.6 Relazioni con le funzioni d'onda

In questo tipo di teoria non c'è più bisogno di utilizzare la notazione delle funzioni d'onda, o le loro derivate, valutate nell'origine. Bisogna trovare delle relazioni che permettano di legare tra loro i due formalismi in modo da poter utilizzare anche le ampiezze di decadimento in $\gamma\gamma$ presentate nel precedente capitolo. Le funzioni d'onda non relativistiche nella gauge di Coulomb possono essere definite naturalmente come funzioni d'onda di Bethe-Salpeter valutate a tempi uguali. Ad esempio, per l'η_c:

$$R_{\eta_c}(r)\frac{1}{\sqrt{4\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2N_c}}\langle 0|\chi^\dagger(-\mathbf{r}/2)\psi(+\mathbf{r}/2)|\eta_c\rangle|_{Coul},$$

il fattore $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ è l'armonica sferica Y_{00}; il fattore $\frac{1}{\sqrt{2N_c}}$ media sulle funzioni d'onda di spin $\delta^{m+m',0}/\sqrt{2}$ e di colore $\delta^{ij}/\sqrt{N_c}$. La simmetria di spin indica che le funzioni d'onda della η_c e della ψ sono uguali all'ordine v^2:

$$R_\psi(r) = R_{\eta_c}(r)(1 + O(v^2)),$$

pertanto, se correzioni all'ordine v^2 possono essere trascurate posso definire una funzione media radiale:

$$R_S(r) = \frac{R_{\eta_c}(r) + 3R_\psi(r)}{4}.$$

Un discorso analogo può essere fatto per le derivate delle funzioni d'onda (le derivate $\boldsymbol{\nabla}$ introducono ognuna un potenza di v), che sono ciò che ci serve nella trattazione delle onde P. Ad esempio per la h_c si ottiene:

$$R_{h_c}(r)\left(\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\hat{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}\right) = \frac{1}{\sqrt{2N_c}}\langle 0|\chi^\dagger(-\mathbf{r}/2)\psi(+\mathbf{r}/2)|h_c(\boldsymbol{\epsilon})\rangle|_{Coul},$$

dove $\boldsymbol{\epsilon}$ è il versore di polarizzaione della h_c, che soddisfa $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon'} = 1$. Anche in questo caso posso, all'ordine v^2, uguagliare le derivate delle funzioni d'onda degli stati P e utilizzare una R'_P.

L'approssimazione di saturazione del vuoto, infine, permette di legare il nostro formalismo a elementi di matrice con il vecchio formalismo delle funzioni d'onda:

$$
\begin{aligned}
\langle \eta_c | \mathcal{O}_1(^1S_0) | \eta_c \rangle &= \frac{1}{4\pi} |R_{\eta_c}|^2 (1 + O(v^4)), && (2.36)\\
\langle \psi | \mathcal{O}_1(^3S_1) | \psi \rangle &= \frac{1}{4\pi} |R_{\psi}|^2 (1 + O(v^4)), && (2.37)\\
\langle h_c | \mathcal{O}_1(^1P_1) | h_c \rangle &= \frac{3}{4\pi} |R'_P|^2 (1 + O(v^2)), && (2.38)\\
\langle \chi_{cJ} | \mathcal{O}_1(^3P_J) | \chi_{cJ} \rangle &= \frac{3}{4\pi} |R'_P|^2 (1 + O(v^2)). && (2.39)
\end{aligned}
$$

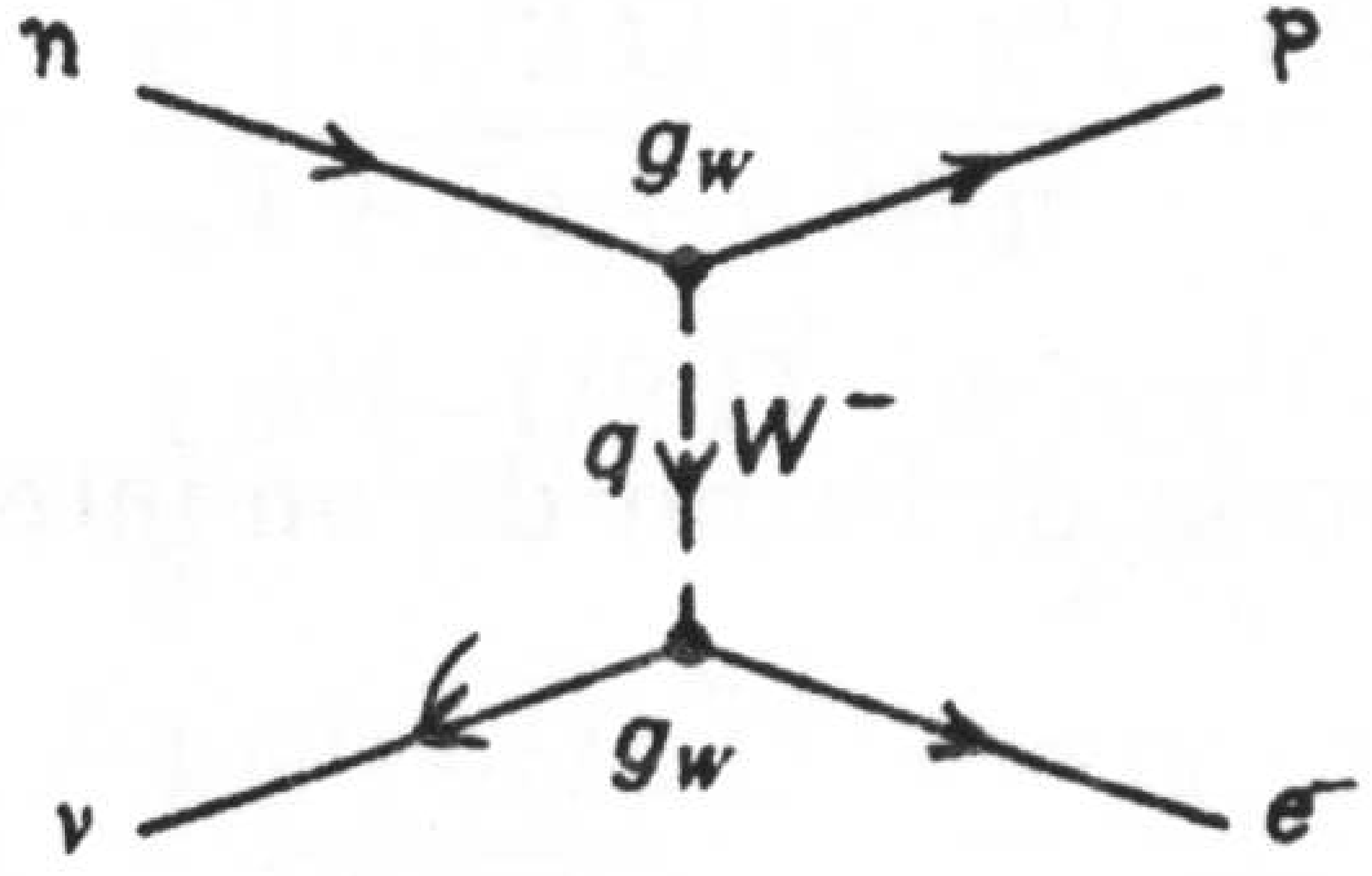


Figura 2.4: Visualizzazione del decadimento del neutrone tramite emissione di W^-.

Capitolo 3

Il calcolo dei coefficienti perturbativi

Per poter utilizzare la teoria precedentemente esposta si devono determinare i coefficienti da inserire nella (2.20). In questo capitolo verrà presentato il metodo di calcolo dei coefficienti perturbativi all'ordine dominante in α_s (LO), con un cenno anche al calcolo all'ordine successivo (NLO).

3.1 Larghezze di decadimento

Come abbiamo visto, le larghezze di decadimento in NRQCD sono esprimibili come serie perturbativa nei due parametri v e α_s.

In generale una grandezza fisica perturbativa G può essere espressa in serie di potenze nel parametro perturbativo α:

$$G = \alpha^k (c_0 + c_1 \alpha + c_2 \alpha^2 + ...).$$

Si definisce ordine dominante (LO) la potenza k di α alla quale si riferisce il primo coefficiente non nullo dell'espansione c_0. L'ordine successivo al dominante è dato da $k+1$.

Per quanto riguarda v abbiamo già osservato che non è possibile andare oltre al LO poichè gli elementi di matrice non perturbativi dei diversi stati di charmonio sono uguali solo a questo livello di accuratezza. Con α_s, al contrario, abbiamo più libertà di azione: per questo parametro è possibile calcolare i coefficienti al NLO.

La formula generale per il calcolo della larghezza di decadimento di una particella di 4-impulso $P = (E, \mathbf{P})$ in n particelle è data da:

$$d\Gamma = \frac{1}{2E}\overline{\sum}|\mathcal{A}|^2 d\phi^{(n)}, \qquad (3.1)$$

$$d\phi^{(n)} = \frac{d^3k_1 ... d^3k_n}{(2\pi)^{3n}(2E_1)...(2E_n)}(2\pi)^4\delta^4(P - \sum k_i), \qquad (3.2)$$

dove:
$k_i = (E_i, \mathbf{k}_i)$ = 4-impulsi delle particelle nello stato finale;
$\overline{\sum}$ = somma sugli stati finali e media su quelli iniziali;
$\mathcal{A}$ = ampiezza per il processo;
$\phi^{(n)}$ = spazio delle fasi dello stato finale di n particelle; per n bosoni identici si deve inserire un fattore $1/n!$.
Per ottenere la larghezza totale si integra sullo spazio delle fasi.

Applicando al decadimento del charmonio quanto sopra e considerando la parte immaginaria di (2.35) (che è quella che ci interessa per il decadimento) si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\mathcal{M}(Q\bar{Q} \to Q\bar{Q}') &= \frac{1}{2}\sum_X (2\pi)^4\delta^4(P - k_X)\mathcal{A}^*_{Q\bar{Q}' \to X}\mathcal{A}_{Q\bar{Q} \to X} \\ &= \sum_n \frac{\mathrm{Im}f_n}{m^{d_n - 4}}\langle Q\bar{Q}|\mathcal{O}_n|Q\bar{Q}'\rangle|_{pert.NRQCD}, \qquad (3.3) \end{aligned}$$

X rappresenta un qualsiasi stato finale di 4-impulso k_X e sottintende l'integrazione sullo spazio delle fasi. $\mathcal{A}_{Q\bar{Q} \to X}$ rappresenta l'ampiezza di scattering per il processo considerato. La prima uguaglianza è il teorema ottico in forma generalizzata.

3.2 Decadimenti in due gluoni

Per osservare direttamente la fattorizzazione del colore nelle ampiezze di decadimento consideriamo i decadimenti in due gluoni. I diagrammi che contribuiscono sono mostrati in Figura 3.1; le ampiezze corrispondenti sono (consideriamo tutti i momenti uscenti $p + \overline{p} + k_1 + k_2 = 0$):

$$D_1^{ab} = i\overline{v}(-\overline{p})ig_s\gamma^\nu T^a_{ij}\left(\frac{\not{k}_2 + \not{\overline{p}} + m}{(k_2 + \overline{p})^2 - m^2}\right)ig_s\gamma^\mu T^b_{jk}u(-p), \qquad (3.4)$$

$$D_2^{ba} = i\overline{v}(-\overline{p})ig_s\gamma^\mu T^b_{ij}\left(\frac{-\not{k}_2 - \not{p} + m}{(-k_2 - \overline{p})^2 - m^2}\right)ig_s\gamma^\nu T^a_{jk}u(-p), \qquad (3.5)$$

$$D_3^{ab} = i\overline{v}(-\overline{p})ig_s\gamma^\sigma T^c_{ij}u(-p)\frac{1}{4m_c^2}g_s f^{cba}\Gamma_{\sigma\nu\mu}[k, k_2, k_1], \qquad (3.6)$$

$$\Gamma_{\sigma\nu\mu}[k, k_2, k_1] = (k - k_2)_\mu g_{\sigma\nu} + (k_2 - k_1)_\sigma g_{\nu\mu} + (k_1 - k)_\nu g_{\mu\sigma},$$

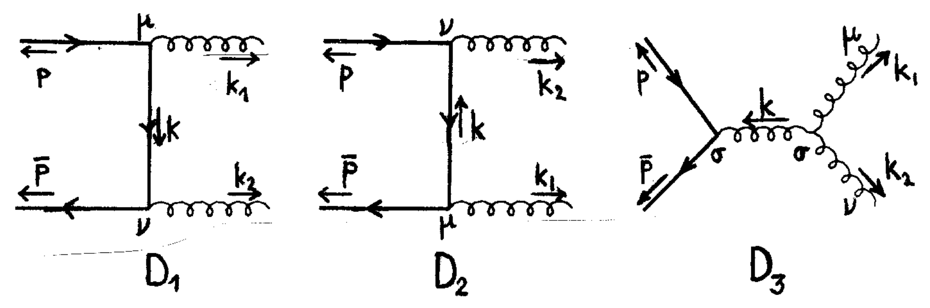


Figura 3.1: Diagrammi che contribuiscono al decadimento $Q\bar{Q} \to gg$.

in cui $\Gamma_{\sigma\mu\nu}[k, k_1, k_2]$ è l'espressione per il vertice a tre gluoni (ved. ad es. [16]).

Mediante l'identità $T^a T^b - T^b T^a = i f^{abc} T^c$ è possibile fattorizzare le ampiezze precedenti:

$$D_1^{ab} = (T^a T^b)_{ij} D_1,$$

$$D_2^{ba} = (T^b T^a)_{ij} D_2,$$

$$D_3^{ab} = (T^a T^b - T^b T^a)_{ij} D_3,$$

ed esprimere l'ampiezza totale come somma di due parti:

$$\mathcal{A}_{Born} = (T^a T^b)_{ij}(D_1 + D_3) + (T^b T^a)_{ij}(D_2 - D_3).$$

Introducendo i tensori simmetrico e antisimmetrico:

$$\mathcal{T_S}^{ab} = (T^a T^b + T^b T^a)/2,$$

$$\mathcal{T_A}^{ab} = (T^a T^b - T^b T^a)/2,$$

possiamo separare l'ampiezza totale in una parte simmetrica e in una antisimmetrica nel colore:

$$\mathcal{A}_{Born} = \mathcal{T_S}^{ab}(D_1 + D_2) + \mathcal{T_A}^{ab}(D_1 - D_2 + 2D_3), \qquad (3.7)$$

Quando si calcolano le larghezze di decadimento si deve effettuare $|\mathcal{A}|^2$, i tensori simmetrico e antisimmetrico hanno le proprietà di moltiplicazione seguenti:

$$\mathcal{T_S}^{ab} \otimes \mathcal{T_S}^{ab} = C_F \frac{1 \otimes 1}{2N_c} + B_F T^a \otimes T^a,$$

$$\mathcal{T_S}^{ab} \otimes \mathcal{T_A}^{ab} = 0,$$

$$\mathcal{T_A}^{ab} \otimes \mathcal{T_A}^{ab} = \frac{C_A}{2} T^a \otimes T^a,$$

dove è stato utilizzato il simbolo $\otimes$ che sottintende un prodotto tra operatori inseriti tra spinori a due componenti:

$$O_i \otimes O_j = \eta^\dagger O_i \xi \ \xi^\dagger O_j \eta.$$

Dalle relazioni precedenti si vede che, sebbene la parte simmetrica possa dare un contributo sia al singoletto sia all'ottetto di colore, la parte antisimmetrica contribuisce solo per l'ottetto di colore.

Ciò significa che, come si poteva affermare già in principio da argomenti di conservazione del colore, i diagrammi D_1 e D_2 contribuiscono ai decadimenti sia degli stati di singoletto sia di quelli di ottetto, viceversa D_3 contribuisce solo per l'ottetto.

Per facilitare alcuni calcoli si possono utilizzare i proiettori per le parti di singoletto e di ottetto di colore delle ampiezze, che sono rispettivamente:

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{N_c}} \delta_{ij}, \tag{3.8}$$

$$P_8 = \sqrt{2} T^a_{ij}. \tag{3.9}$$

Il loro effetto è il seguente:

$$\begin{aligned}
P_1 \mathcal{A}_{Born} &= \frac{\delta^{ji}}{\sqrt{N_c}} (\mathcal{T_S}^{ab}(D_1 + D_2) + \mathcal{T_A}^{ab}(D_1 - D_2 + 2D_3))_{ij} \\
&= \mathrm{Tr} \mathcal{T_S}^{ab}(D_1 + D_2) = 2\delta^{ab} T_F (D_1 + D_2), \qquad (3.10) \\
P_8 \mathcal{A}_{Born} &= \sqrt{2} T^c_{ji} (\mathcal{T_S}^{ab}(D_1 + D_2) + \mathcal{T_A}^{ab}(D_1 - D_2 + 2D_3))_{ij} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \mathrm{Tr}(T^c T^a T^b + T^c T^b T^a)(D_1 + D_2) \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{2} \mathrm{Tr}(T^c T^a T^b - T^c T^b T^a)(D_1 - D_2 + 2D_3) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} (d^{cab} + i f^{cab} + d^{cba} + i f^{cba})(D_1 + D_2) \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{8} (d^{cab} + i f^{cab} - d^{cba} - i f^{cba})(D_1 - D_2 + 2D_3) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(d^{cab}(D_1 + D_2) + i f^{cab}(D_1 - D_2 + 2D_3) \right). \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

3.3 Il calcolo LO delle larghezze adroniche

Per il calcolo delle larghezze di decadimento al LO in α_s di alcuni stati del charmonio non è necessario utilizzare il metodo di espansione in soglia perchè esse possono essere agevolmente ricavate dalle espressioni analoghe dei decadimenti elettromagnetici (ved. le (1.4)(1.5)(1.6)(1.7)). L'unica differenza tra i due calcoli è che i gluoni hanno carica di colore. Il contributo del colore, come visto nel paragrafo precedente, può essere fattorizzato. Risulta quindi possibile calcolare dei coefficienti che permettono il passaggio dalle larghezze di decadimento fotoniche a quelle adroniche.

Per far ciò ci serviamo dei proiettori sugli stati di singoletto e di ottetto di colore.

$(c\bar{c})^{[1]} \to gg$

Osserviamo in Figura 3.2 i diagrammi di Feynman relativi al decadimento del quarkonio in due fotoni o gluoni al LO in α_s. Le ampiezze dei processi

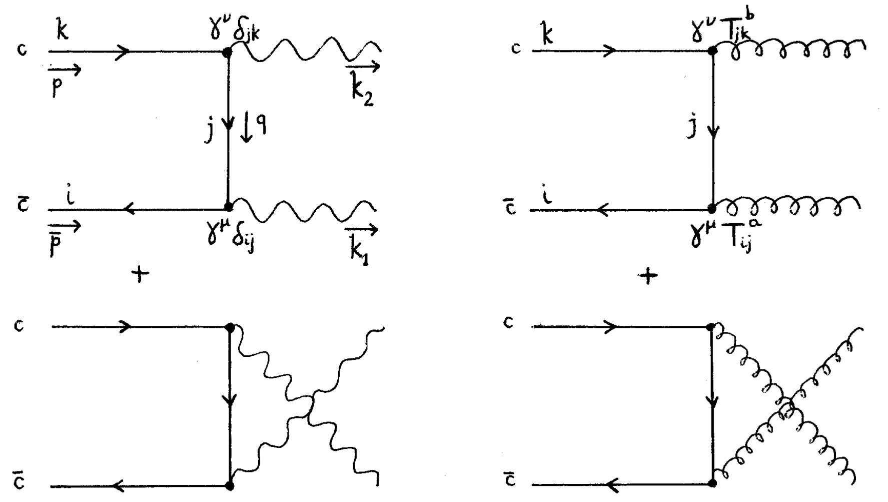


Figura 3.2: Diagrammi di Feynman per $Q\bar{Q} \to \gamma\gamma, gg$ al LO.

sono:

$$\mathcal{A}_{\gamma\gamma} = i\overline{v}(\overline{p})iee_c\delta_{ij}\left(\gamma^\mu\frac{\not k_1 - \not \overline{p} + m}{(k_1-\overline{p})^2-m^2}\gamma^\nu + \gamma^\nu\frac{\not k_2 - \not \overline{p} + m}{(k_2-\overline{p})^2-m^2}\gamma^\mu\right)iee_c\delta_{jk}u(p), \tag{3.12}$$

$$\mathcal{A}_{gg} = i\overline{v}(\overline{p})ig_sT^a_{ij}\left(\gamma^\mu\frac{\not k_1 - \not \overline{p} + m}{(k_1-\overline{p})^2-m^2}\gamma^\nu + \gamma^\nu\frac{\not k_2 - \not \overline{p} + m}{(k_2-\overline{p})^2-m^2}\gamma^\mu\right)ig_sT^b_{jk}u(p). \tag{3.13}$$

La larghezza di decadimento è data da (3.1):

$$\Gamma = \frac{1}{2}\int\frac{d^3k_1d^3k_2}{(2\pi)^6 4E_1E_2}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1+k_2-P)\frac{1}{2E}\overline{\sum}|\mathcal{A}|^2,$$

il fattore 1/2 deriva dalla statistica di Bose. Lo spazio delle fasi è identico per i due processi; le differenze risiedono unicamente nella parte di colore. Proiettando le due ampiezze sul singoletto di colore si ottiene:

$$P_1\mathcal{A}_{\gamma\gamma} = \frac{\delta_{ik}}{\sqrt{N_c}}\delta_{ij}\delta_{jk}\mathcal{A}_{em} = \sqrt{N_c}\mathcal{A}_{em},$$

$$P_1\mathcal{A}_{gg} = \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{N_c}}(T^aT^b)_{ij}\mathcal{A}_f = \frac{1}{\sqrt{N_c}}\mathrm{Tr}(T^aT^b)\mathcal{A}_f = \frac{T_F}{\sqrt{N_c}}\delta^{ab}\mathcal{A}_f,$$

dove $\mathcal{A}_{em}$ e $\mathcal{A}_f$ sono rispettivamente le ampiezze di decadimento in 2 fotoni e in 2 gluoni da cui sono state estratte le matrici di colore; il legame tra loro è dato da:

$$\frac{\mathcal{A}_{em}}{\mathcal{A}_f} = \frac{\alpha_{em}e_c^2}{\alpha_s}.$$

Sommando le ampiezze e quadrando si ottiene:

$$|\mathcal{A}_{\gamma\gamma}|^2 = N_c|\mathcal{A}_{em}|^2,$$

$$|\mathcal{A}_{gg}|^2 = \frac{T_F^2}{N_c}\delta^{ab}\delta^{ab}|\mathcal{A}_f|^2 = \frac{8T_F^2}{N_c}|\mathcal{A}_f|^2,$$

da cui:

$$\frac{\Gamma_{gg}}{\Gamma_{\gamma\gamma}} = \frac{2}{9}\frac{\alpha_s^2}{\alpha_{em}^2e_c^4}.$$

Dalle (1.4)(1.5)(1.6), mediante le (2.36)(2.37)(2.38)(2.39), si ottengono le ampiezze di decadimento in due gluoni al LO[1]:

$$\Gamma({}^1S_0^{[1]} \to gg) = \frac{8}{3}\pi\alpha_s^2 \frac{\langle \eta_c | \mathcal{O}_1({}^1S_0) | \eta_c \rangle}{m_c^2}, \tag{3.14}$$

$$\Gamma({}^3P_0^{[1]} \to gg) = 6\frac{4\pi}{3}\alpha_s^2 \frac{\langle \chi_{c0} | \mathcal{O}_1({}^3P_0) | \chi_{c0} \rangle}{m_c^4}, \tag{3.15}$$

$$\Gamma({}^3P_2^{[1]} \to gg) = \frac{8}{5}\frac{4\pi}{3}\alpha_s^2 \frac{\langle \chi_{c2} | \mathcal{O}_1({}^3P_0) | \chi_{c2} \rangle}{m_c^4}. \tag{3.16}$$

${}^3S_1^{[1]} \to ggg$

Anche in questo caso è possibile ricavare l'ampiezza di decadimento in tre gluoni da quella in tre fotoni. Questo è dovuto al fatto che la J/ψ non può decadere in due gluoni e quindi i diagrammi con vertici a tre gluoni del tipo di Figura 3.3 non contribuiscono. Gli unici contributi al decadimento in tre

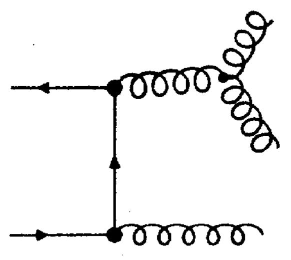


Figura 3.3: Diagramma che non contribuisce al decadimento della J/ψ.

gluoni derivano quindi da diagrammi simili a quelli del decadimento in fotoni.

[1] Ricordiamo che la convenzione da noi adottata per gli elementi di matrice differisce leggermente da quella utilizzata da Bodwin, Braaten e Lepage in [1] (che identifichiamo con $\langle \mathcal{O} \rangle^{BBL}$); valgono le relazioni:

$$\langle \mathcal{O}_1 \rangle = \frac{\langle \mathcal{O}_1 \rangle^{BBL}}{2N_c}, \qquad \langle \mathcal{O}_8 \rangle = \langle \mathcal{O}_8 \rangle^{BBL}.$$

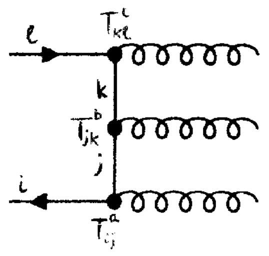


Figura 3.4: Annichilazione della J/ψ in tre gluoni.

La trattazione è analoga a quella del decadimento in due gluoni esaminata al punto precedente. Si ottiene (con ovvio significato della notazione):

$$P_1\mathcal{A}_{\gamma\gamma\gamma} = \frac{\delta_{il}}{\sqrt{N_c}}\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kl}\mathcal{A}_{em} = \sqrt{N_c}\mathcal{A}_{em},$$

$$P_1\mathcal{A}_{ggg} = \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{N_c}}(T^aT^bT^c)_{ij}\mathcal{A}_f = \frac{1}{\sqrt{N_c}}\mathrm{Tr}(T^aT^bT^c)\mathcal{A}_f = \frac{1}{\sqrt{N_c}}\left(\frac{1}{4}d^{abc}\right)\mathcal{A}_f,$$

dove la parte antisimmetrica di colore non compare perchè, come visto in precedenza, il singoletto di colore dà unicamente contributi simmetrici, quindi:

$$|P_1\mathcal{A}_{\gamma\gamma\gamma}|^2 = 3|\mathcal{A}_{em}|^2,$$

$$|P_1\mathcal{A}_{ggg}|^2 = \frac{1}{N_c\cdot 16}d^{abc}d^{abc}|\mathcal{A}_f|^2 = \frac{1}{N_c\cdot 16}\frac{40}{3}|\mathcal{A}_f|^2,$$

$$\frac{\Gamma_{ggg}}{\Gamma_{\gamma\gamma\gamma}} = \frac{5}{54}\frac{\alpha_s^3}{\alpha_{em}^3 e_c^6}.$$

Quindi si ottiene che, all'ordine α_s^3:

$$\Gamma({}^3S_1^{[1]} \to ggg) = \frac{40}{81}(\pi^2-9)\alpha_s^3\frac{\langle J/\psi|\mathcal{O}_1({}^3S_1)|J/\psi\rangle}{m_c^2}. \qquad (3.17)$$

${}^3S_1^{[8]} \to q\bar{q}$

Come ultimo esempio ricaviamo l'ampiezza di decadimento per la ${}^3S_1^{[8]}$ all'ordine α_s^2. Questa volta, all'ordine α_s^2, la coppia $c\bar{c}$ si può annichilare in $q\bar{q}$ leggeri attraverso un solo gluone virtuale, come mostrato in Figura 3.5.

Si vede attraverso un calcolo esplicito che l'ampiezza di decadimento per ${}^3S_1^{[8]} \to gg$ è zero. Per la parte simmetrica nel colore ciò è ovvio dal teorema di Yang. Nella notazione del paragrafo 3.2, verifichiamo che è zero la combinazione $D_1 - D_2 + 2D_3$, il che è sufficiente per annullare la parte antisimmetrica di colore, e quindi la possibilità del decadimento in due gluoni al LO.

$$\begin{aligned} D_1 - D_2 &= i g_s^2 \epsilon_\mu(k_1)\epsilon_\nu(k_2)\overline{v}(-\overline{p})\left(\gamma^\nu \frac{\not{k}_2 + \not{\overline{p}} + m}{(k_2+\overline{p})^2 - m^2}\gamma^\mu \right. \\ &+ \left. \gamma^\mu \frac{\not{k}_2 + \not{p} - m}{(k_2+p)^2 - m^2}\gamma^\nu \right) u(-p); \end{aligned} \tag{3.18}$$

le equazioni di Dirac per gli spinori sono:

$$(\not{p} - m)u(p) = 0,$$

$$\overline{v}(\overline{p})(\not{\overline{p}} + m) = 0.$$

Esse permettono di semplificare l'espressione (3.18); ad esempio applicando la prima si ottiene:

$$\begin{aligned} \overline{v}(-\overline{p})\gamma^\mu(\not{k}_2 + \not{p} - m)\gamma^\nu u(-p) &= \overline{v}(-\overline{p})\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu u(-p)k_{2\lambda} \\ &+ \overline{v}(-\overline{p})\gamma^\mu(\gamma^\lambda p_\lambda - m)\gamma^\nu u(-p) \\ &= \overline{v}(-\overline{p})\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu u(-p)k_{2\lambda} \\ &+ \overline{v}(-\overline{p})\gamma^\mu\gamma^\nu(-\gamma^\lambda p_\lambda - m)u(-p) \\ &+ \overline{v}(-\overline{p})\gamma^\mu 2g^{\lambda\nu}p_\lambda u(-p) \\ &= \overline{v}(-\overline{p})\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu u(-p)k_{2\lambda} \\ &+ 2\overline{v}(-\overline{p})\gamma^\mu p^\nu u(-p). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Sostituite in (3.18) danno:

$$\begin{aligned} D_1 - D_2 &= i g_s^2 \epsilon_\mu(k_1)\epsilon_\nu(k_2)\overline{v}(-\overline{p})\left(\frac{\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu}{2\overline{p}\cdot k_2}k_{2\lambda} + 2\overline{p}^\nu \frac{\gamma^\mu}{2\overline{p}\cdot k_2} \right. \\ &+ \left. \frac{\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu}{2p\cdot k_2}k_{2\lambda} + 2p^\nu\frac{\gamma^\mu}{2p\cdot k_2}\right) u(-p). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Nel CMS si ha:

$$p = (E, \mathbf{p}), \qquad \overline{p} = (E, -\mathbf{p}), \qquad E = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2},$$

$$p + \overline{p} = P = (2E, \mathbf{0}),$$

$$k_2 = (E, \mathbf{k}_2), \qquad k_1 = (E, \mathbf{k}_1) = (E, -\mathbf{k}_2).$$

Al LO in v vale l'approssimazione:

$$\overline{p} \cdot k_2 = p \cdot k_2 = m^2. \tag{3.21}$$

Utilizzando l'identità:

$$\gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\mu = 2(g^{\mu\lambda}\gamma^\nu - g^{\mu\nu}\gamma^\lambda + g^{\nu\lambda}\gamma^\mu)$$

e le condizioni di trasversalità per i gluoni uscenti: $k^\mu \epsilon_\mu(k) = 0$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
D_1 - D_2 &= i\frac{g_s^2}{2m_c^2}\epsilon_\mu(k_1)\epsilon_\nu(k_2)\overline{v}(-\overline{p})\left(2(g^{\mu\lambda}\gamma^\nu - g^{\mu\nu}\gamma^\lambda + g^{\nu\lambda}\gamma^\mu)k_{2\lambda}\right. \\
&+ \left. 2(p+\overline{p})^\nu \gamma^\mu\right) u(-p) \\
&= i\frac{g_s^2}{m_c^2}\epsilon_\mu(k_1)\epsilon_\nu(k_2)((g^{\mu\lambda}V^\nu - g^{\mu\nu}V^\lambda + g^{\nu\lambda}V^\mu)k_{2\lambda} + P^\nu V^\mu) \\
&= i\frac{g_s^2}{m_c^2}\epsilon_\mu(k_1)\epsilon_\nu(k_2)(k_2^\mu V^\nu - k_2^\nu V^\mu - g^{\mu\nu}(k_2 \cdot V) + P^\nu V^\mu) \\
&= i\frac{g_s^2}{m_c^2}\epsilon_\mu(k_1)\epsilon_\nu(k_2)(-g^{\mu\nu}(k_2 \cdot V) + k_2^\mu V^\nu - k_1^\nu V^\mu),
\end{aligned} \tag{3.22}$$

dove si è adottata la notazione $V^\mu = \overline{v}(-\overline{p})\gamma^\mu u(-p)$. A questo punto calcoliamo D_3:

$$\begin{aligned}
D_3 &= i\frac{g_s^2}{4m_c^2}\epsilon_\mu(k_1)\epsilon_\nu(k_2)\overline{v}(-\overline{p})\gamma^\sigma u(-p) \\
&\times [(k-k_2)_\mu g_{\sigma\nu} + (k_2 - k_1)_\sigma g_{\mu\nu} + (k_1 - k)_\nu g_{\sigma\mu}] \\
&= i\frac{g_s^2}{4m_c^2}\epsilon_\mu(k_1)\epsilon_\nu(k_2)[V_\nu(k_1 - 2k_2)_\mu + g_{\mu\nu}(V \cdot (k + 2k_2)) + V_\mu(2k_1 + k_2)_\nu] \\
&= i\frac{g_s^2}{4m_c^2}\epsilon_\mu(k_1)\epsilon_\nu(k_2)[-2V_\nu k_{2\mu} + 2g_{\mu\nu}V \cdot k_2 + 2V_\mu k_{1\nu}],
\end{aligned} \tag{3.23}$$

dove è stato utilizzato il fatto che:

$$\begin{aligned}
V \cdot k &= \overline{v}(-\overline{p})\gamma^\sigma u(-p)k_\sigma = \overline{v}(-\overline{p}) \not{k} u(-p) \\
&= \overline{v}(-\overline{p})(\not{p} + \not{\overline{p}})u(-p) = 0
\end{aligned}$$

grazie all'equazione di Dirac. Pertanto $D_1 - D_2 = -2D_3$. In tal modo abbiamo verificato che al LO in v non si ha decadimento in due gluoni per la ${}^3S_1^{[8]}$.

Essendo nulla l'ampiezza al LO, si deduce direttamente che la larghezza di decadimento è zero anche all'ordine successivo in v. Infatti essendo:

$$A(= D_1 - D_2 + 2D_3) = A_0 + v^2 A_2 + v^4 A_4 + \ldots ,$$

quando si calcola $|A|^2$ i contributi alla larghezza di decadimento all'ordine v^2 derivano dai termini $A_2^* A_0$ e $A_0^* A_2$, che sono chiaramente nulli.

È possibile allora calcolare l'ampiezza di decadimento ${}^3S_1^{[8]} \to q\bar{q}$ mediante un'analogia con il decadimento ${}^3S_1^{[1]} \to e^+e^-$:

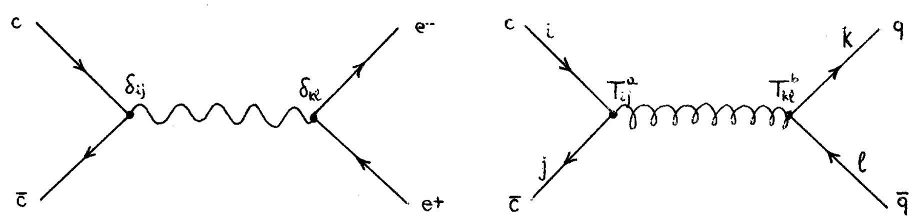


Figura 3.5: Annichilazione di ${}^3S_1^{[8]}$ in $q\bar{q}$ attraverso un gluone virtuale.

$$\mathcal{A}_\gamma = i\overline{v}_i(\overline{p}) iee_c\gamma^\mu \delta_{ij} u_j(p) \frac{g^{\mu\nu}}{k^2} \overline{u}(p') ie\gamma^\nu v(\overline{p'}), \tag{3.24}$$

$$\mathcal{A}_g = i\overline{v}_i(\overline{p}) ig_s\gamma^\mu T^a_{ij} u_j(p) \frac{g^{\mu\nu}\delta^{ab}}{k^2} \overline{u}_k(p') ig_s\gamma^\nu T^b_{kl} v_l(\overline{p'}), \tag{3.25}$$

nel CMS $k^2 = 4m_c^2$.

Proiettando (3.24) sul singoletto di colore e (3.25) sull'ottetto si ottiene:

$$P_1\mathcal{A}_\gamma = \frac{1}{\sqrt{N_c}} \delta_{ij}\delta_{ij}\mathcal{A}_{em},$$

$$P_8\mathcal{A}_g = \sqrt{2} T^c_{ji} T^a_{ij} T^a_{kl} \mathcal{A}_f = \sqrt{2} T_F \delta^{ac} T^a_{kl} \mathcal{A}_f,$$

$$|P_1\mathcal{A}_\gamma|^2 = \frac{1}{N_c} \delta_{kl}\delta_{kl} |\mathcal{A}_{em}|^2 = N_c |\mathcal{A}_{em}|^2,$$

$$|P_8\mathcal{A}_g|^2 = 2T_F^2 T^c_{lk} T^c_{kl} |\mathcal{A}_f|^2,$$

sommando su c si ottiene $T^c_{lk} T^c_{kl} = \delta^{cc} T_F = 8T_F$; inoltre mediando sugli stati iniziali e sommando su quelli finali si deve dividere per 8 e moltiplicare per n_f ($n_f = 3$ è il numero di quark più leggeri del charm), e quindi:

$$\frac{\Gamma_g}{\Gamma_\gamma} = \frac{n_f}{8} \frac{16T_F^3}{N_c} \frac{\alpha_s^2}{\alpha_{em}^2 e_c^2}.$$

Confrontando con (1.3) si ottiene:

$$\Gamma(^3S_1^{[8]} \to q\bar{q}) = \pi\alpha_s^2 \frac{\langle J/\psi|\mathcal{O}_8(^3S_1)|J/\psi\rangle}{m_c^2}. \tag{3.26}$$

I coefficienti all'ordine α_s^2 da sostituire in (3.3) sono:

$$2\mathrm{Im}f_1(^1S_0) = \frac{8}{3}\pi\alpha_s^2,$$

$$2\mathrm{Im}f_1(^3S_1) = 0,$$

$$2\mathrm{Im}f_1(^3P_0) = 8\pi\alpha_s^2,$$

$$2\mathrm{Im}f_1(^3P_1) = 0,$$

$$2\mathrm{Im}f_1(^3P_2) = \frac{32}{15}\pi\alpha_s^2,$$

$$2\mathrm{Im}f_8(^3S_1) = \pi\alpha_s^2.$$

3.4 Il metodo dell'espansione in soglia

Il metodo per il calcolo dei coefficienti esposto nel seguito è quello dell'espansione in soglia, introdotto da Braaten e Chen [17] [18]. In questo metodo si calcola perturbativamente in QCD una quantità strettamente correlata all'ampiezza di annichilazione, dopodichè essa viene espressa come serie di potenze dell'impulso $\mathbf{q}$ di c e $\bar{c}$. Anche gli elementi di matrice degli operatori a 4-fermioni in NRQCD sono calcolati in teoria perturbativa ed espansi attorno alla soglia $\mathbf{q} = 0$. Confrontando i due risultati si ottengono i coefficienti che cerchiamo.

Partiamo considerando l'espressione per gli spinori $u(\mathbf{q})$ e $v(\mathbf{q})$ in funzione degli spinori a due componenti ξ, η:

$$u(\mathbf{q}) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} \xi \\ \frac{\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{E+m}\xi \end{pmatrix}, \tag{3.27}$$

$$v(-\mathbf{q}) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} \frac{-\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{E+m}\eta \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{3.28}$$

Si possono verificare per sostituzione diretta le seguenti formule, valide nel CMS:

$$\overline{v}(-\overline{p})u(-p) = \eta^\dagger(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi, \tag{3.29}$$

$$\overline{v}(-\overline{p})\gamma^\mu u(-p) = L^\mu{}_j \left(\eta^\dagger\sigma^j\xi - \frac{E}{(E+m)}v^j\eta^\dagger(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi\right) \quad , \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
\overline{v}(-\overline{p})(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)u(-p) &= (P^\mu L^\nu{}_j - P^\nu L^\mu{}_j)(\frac{m}{E^2}\,\eta^\dagger\sigma^j\xi \\
&+ \frac{v^j}{(E+m)}\,\eta^\dagger(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi) \\
&- \frac{1}{2}L^\mu{}_i L^\nu{}_j v^k\,\eta^\dagger\{[\sigma^i,\sigma^j],\sigma^k\}\xi,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
\overline{v}(-\overline{p})(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda - \gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\mu)u(-p) &= L^\mu{}_i L^\nu{}_j L^\lambda{}_k(-\frac{1}{2}\eta^\dagger\{[\sigma^i,\sigma^j],\sigma^k\}\xi \\
&+ \frac{Ev^l}{2(E+m)} \times (v^i\eta^\dagger\{[\sigma^j,\sigma^k],\sigma^l\}\xi \\
&+ v^j\eta^\dagger\{[\sigma^k,\sigma^i],\sigma^l\}\xi + v^k\eta^\dagger\{[\sigma^i,\sigma^j],\sigma^l\}\xi)) \\
&+ \left(P^\mu L^\nu{}_i L^\lambda{}_j + L^\mu{}_i L^\nu{}_j P^\lambda + L^\mu{}_j P^\nu L^\lambda{}_i\right) \\
&\times \left(\eta^\dagger v^i\sigma^j\xi \;-\; \eta^\dagger v^j\sigma^i\xi\right),
\end{aligned} \tag{3.32}$$

dove gli $L^\mu{}_i$ sono definiti nel modo:

$$L^\mu{}_i = \begin{cases} 0 & \mu = 0 \\ \delta_i^k & \mu = k \end{cases} .$$

Consideriamo ad esempio il processo ${}^1S_0^{[1,8]} \to gg$. Il colore, come già osservato, fattorizza. Siccome l'unico contributo al decadimento dell'onda S in singoletto di spin all'ordine dominante in v deriva dal primo termine nella (3.32), in cui tra $\overline{v}(-\overline{p})$ e $u(-p)$ sono contenute tre matrici γ, se ne deduce che solo i diagrammi D_1 e D_2, in cui la coppia si annichila in due gluoni, contribuiscono. Pertanto solo la parte simmetrica di colore $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ può dare contributo. La trattazione della parte cinematica è del tutto equivalente al decadimento in due fotoni.

Entriamo nei dettagli del calcolo dei coefficienti al LO in α_s e in v.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= i g_s^2 \epsilon^\mu(k_1)\epsilon^\nu(k_2)\overline{v}(-\overline{p})(\gamma^\nu \frac{\not k_2 + \not \overline{p} + m}{(k_2+\overline{p})^2 - m^2}\gamma^\mu \\
&+ \gamma^\mu \frac{-\not k_2 - \not p + m}{(k_2+p)^2 - m^2}\gamma^\nu) u(-p) \\
&= i\frac{g_s^2}{2m^2}\epsilon^\mu(k_1)\epsilon^\nu(k_2)\overline{v}(-\overline{p})(\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu(k_{2\lambda}+\overline{p}_\lambda) \\
&- \gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu(k_{2\lambda}+p_\lambda))u(-p).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Al LO in v possiamo porre $\overline{p} = p = (m, \mathbf{0})$, pertanto la (3.33) diventa:

$$\mathcal{A} = i\frac{g_s^2}{2m^2}\epsilon^\mu(k_1)\epsilon^\nu(k_2)\overline{v}(-\overline{p})(\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu)u(-p)(2m, \mathbf{k}_2)_\lambda. \tag{3.34}$$

Utilizzando la (3.32) e l'identità:

$$\eta^\dagger\{[\sigma^i, \sigma^j], \sigma^k\}\xi = 4i\epsilon^{ijk}\eta^\dagger\xi,$$

si ottiene:

$$\mathcal{A} = -\frac{g_s^2}{2m^2}\epsilon^\mu(k_1)\epsilon^\nu(k_2)L^\nu{}_i L^\lambda{}_j L^\mu{}_k(4\epsilon^{ijk}\eta^\dagger\xi)(2m, \mathbf{k}_2)_\lambda. \tag{3.35}$$

Per completare il calcolo dei coefficienti dobbiamo applicare la (3.3). Lo spazio delle fasi è quello per il decadimento in due particelle:

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Im}\mathcal{M} &= \frac{1}{2}\int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2k_{10}}\int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2k_{20}}(2\pi)^4\delta^4(P-k_1-k_2)\overline{\sum}|\mathcal{A}|^2 \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2k_{20}}\int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2k_{10}}(2\pi)\delta(2m-k_{10}-k_{20}) \\
&\times (2\pi)^3\delta^3(-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\overline{\sum}|\mathcal{A}|^2 \\
&= \frac{1}{2}\int d\Omega \int dk_2 \frac{\mathbf{k}_2^2}{4k_{20}^2}\frac{1}{(2\pi)^2}\delta(2m-2k_{20})\overline{\sum}|\mathcal{A}|^2, \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

$$\tag{3.37}$$

dove il fattore 1/2 deriva dalla statistica di Bose. Sommando sulle polarizzazioni degli stati finali si ha che:

$$\begin{aligned}
\sum|\mathcal{A}|^2 &= \sum \frac{g_s^4}{4m^4}\epsilon^\mu(k_1)\epsilon^\nu(k_2)\epsilon^{\mu'}(k_1)\epsilon^{\nu'}(k_2)\epsilon^{ijk}\epsilon^{i'j'k'} \\
&\times L^\nu{}_i L^\lambda{}_j L^\mu{}_k L^{\nu'}{}_{i'} L^{\lambda'}{}_{j'} L^{\mu'}{}_{k'}(2m, \mathbf{k}_2)_\lambda(2m, \mathbf{k}_2)_{\lambda'}\eta^\dagger\xi\xi^\dagger\eta \\
&= \frac{16\pi^2\alpha_s^2}{4m^4}\epsilon^{ijk}\epsilon^{ij'k}k_{2j}k_{2j'}\eta^\dagger\xi\xi^\dagger\eta.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Poichè $\epsilon^{ijk}\epsilon^{ij'k} = 2\delta^{jj'}$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Im}\mathcal{M} &= \frac{1}{2}\int d\Omega \int dk_2 \frac{1}{4(2\pi)^2}\delta(2m-2k_{20})\frac{4\pi^2\alpha_s^2}{m^4}2\delta^{jj'}k_{2j}k_{2j'}\eta^\dagger\xi\xi^\dagger\eta \\
&= \frac{1}{2}\int dk_2 \frac{1}{2}\delta(m-k_{20})\frac{4\pi\alpha_s^2}{3m^2}2\delta^{jj'}\delta_{jj'}\eta^\dagger\xi\xi^\dagger\eta \\
&= \frac{1}{2}\frac{4\pi\alpha_s^2}{m^2}\eta^\dagger\xi\xi^\dagger\eta, \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

dove si è utilizzato il fatto che:

$$\int d\Omega k_{2j}k_{2j'} = \frac{4\pi}{3}m^2\delta_{jj'}.$$

Si ottiene, reinserendo i coefficienti di colore:

$$2\mathrm{Im}\mathcal{M} = \begin{pmatrix} C_F & \frac{1\otimes 1}{2N_c} \\ B_F & T^a \otimes T^a \end{pmatrix} \frac{2\pi\alpha_s^2}{m^2}\eta^\dagger\xi\xi^\dagger\eta.$$

Quindi i coefficienti perturbativi per la larghezza di decadimento dello stato $^1S_0$ in singoletto e ottetto di colore sono:

$$2\mathrm{Im}f_{1,8}(^1S_0) = \begin{pmatrix} C_F \\ B_F \end{pmatrix} 2\pi\alpha_s^2.$$

Osserviamo che il coefficiente dell'ottetto si ottiene da quello di singoletto semplicemente sostituendo B_F a C_F; questo si verifica per tutti i decadimenti in due guoni in cui la parte antisimmetrica di colore non contribuisce al decadimento.

3.5 Cenno al calcolo NLO

Consideriamo un'ampiezza di decadimento:

$$\mathcal{A} = g_s^2(a_0 + a_1 g_s + a_2 g_s^2 + ...).$$

Per calcolare i coefficienti all'ordine α_s^3 bisogna sommare i seguenti contributi:

$$\Gamma = \alpha_s^2 a_0^* a_0 + \alpha_s^3 a_1^* a_1 + \alpha_s^3(a_0^* a_2 + a_2^* a_0) + O(\alpha_s^4),$$

I coefficienti a_1 corrispondono a correzioni reali (decadimenti in tre gluoni), gli a_2 a correzioni virtuali (decadimenti in due gluoni, in cui è presente un gluone che origina un loop interno), come schematizzato in Figura 3.6. Tra le correzioni reali è presente anche il decadimento in $q\bar{q}g$ (ved. Figura 3.7). Esso merita un commento a parte perchè, come abbiamo visto nel primo capitolo, presenta delle divergenze infrarosse che non sono eliminabili nel modello di singoletto di colore. Nel calcolo dei coefficienti per il decadimento, tali termini si semplificano con analoghe divergenze che si ottengono dalle correzioni NLO delle ampiezze di decadimento NRQCD (ved. Figura 3.8).

Infine un cenno alla trattazione delle correzioni virtuali. Come visto sopra, i termini che contribuiscono all'ampiezza di decadimento NLO sono quelli relativi ai coefficienti di tipo a_2; nel calcolo della larghezza di decadimento essi vanno moltiplicati unicamente con le ampiezze relative agli a_0, calcolate nel LO. Tali contributi sono tabulati nell'articolo [4].

Senza addentrarci ulteriormente nel calcolo delle correzioni NLO, che presenta aspetti estremamente tecnici, forniamo di seguito le espressioni teoriche per le ampiezze di decadimento al NLO che utilizzeremo, come si trovano nei lavori [4][5][32][31].

Per comodità, prima di elencare le espressioni al NLO, riassumiamo le espressioni al LO in α_s:

$$\Gamma({}^1S_0^{[8]} \to gg) = B_F 2\alpha_s^2 \pi \frac{\langle H|\mathcal{O}_8({}^1S_0)|H\rangle}{m^2}, \tag{3.40}$$

$$\Gamma({}^3S_1^{[8]} \to q\bar{q}) = n_f \frac{\alpha_s^2 \pi}{3} \frac{\langle H|\mathcal{O}_8({}^3S_1)|H\rangle}{m^2}, \tag{3.41}$$

$$\Gamma({}^3P_0^{[1]} \to gg) = C_F 6\alpha_s^2 \pi \frac{\langle H|\mathcal{O}_1({}^3P_0)|H\rangle}{m^4}, \tag{3.42}$$

$$\Gamma({}^3P_1^{[1]} \to gg) = 0, \tag{3.43}$$

$$\Gamma({}^3P_2^{[1]} \to gg) = C_F \frac{8\alpha_s^2 \pi}{5} \frac{\langle H|\mathcal{O}_1({}^3P_2)|H\rangle}{m^4}, \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}\Gamma({}^1S_0^{[8]} \to LH) &= \Gamma({}^1S_0^{[8]} \to gg) \left\{1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\left[C_F\left(-5 + \frac{\pi^2}{4}\right)\right.\right. \\ &+ \left.\left. C_A\left(\frac{122}{9} - \frac{17}{24}\pi^2\right) - \frac{16}{9} n_f T_F + 2b_0 \ln\frac{\mu}{2m}\right]\right\},\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}\Gamma({}^3S_1^{[8]} \to LH) &= \Gamma({}^3S_1^{[8]} \to q\bar{q}) \left\{1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\left[-\frac{13}{4} C_F\right.\right. \\ &+ \left.\left. C_A\left(\frac{133}{18} + \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{\pi^2}{4}\right) - \frac{10}{9} n_f T_F + 2b_0 \ln\frac{\mu}{2m}\right]\right\} \\ &+ \frac{5}{3}\alpha_s^3 \left(-\frac{73}{4} + \frac{67}{36}\pi^2\right) \frac{\langle H|\mathcal{O}_8({}^3S_1)|H\rangle}{m^2},\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\Gamma({}^1P_1^{[1]} \to LH) = \frac{16 B_F C_F \alpha_s^3}{3} \left(\frac{7\pi^2 - 112}{48} - \ln\frac{\mu_\Lambda}{2m}\right) \frac{\langle H|\mathcal{O}_1({}^1P_1)|H\rangle}{m^4}, \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}\Gamma({}^3P_0^{[1]} \to LH) &= \Gamma({}^3P_0^{[1]} \to gg) \left\{1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\left[C_F\left(-\frac{7}{3} + \frac{\pi^2}{4}\right)\right.\right. \\ &+ \left.\left. C_A\left(\frac{427}{81} - \frac{1}{144}\pi^2\right) + 2b_0 \ln\frac{\mu}{2m}\right]\right\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ && n_f \alpha_s^3 \frac{8}{9} C_F \left(-\frac{29}{6} - \ln\frac{\mu_\Lambda}{2m} \right) \frac{\langle H|\mathcal{O}_1(^3P_0)|H\rangle}{m^4}, \quad (3.48) \\
\Gamma(^3P_1^{[1]} \to LH) &= && \alpha_s^3 C_A C_F \left(\frac{587}{27} - \frac{317}{144}\pi^2 \right) \frac{\langle H|\mathcal{O}_1(^3P_1)|H\rangle}{m^4} \\
&+ && n_f \alpha_s^3 \frac{8}{9} C_F \left(-\frac{4}{3} - \ln\frac{\mu_\Lambda}{2m} \right) \frac{\langle H|\mathcal{O}_1(^3P_1)|H\rangle}{m^4}, \quad (3.49) \\
\Gamma(^3P_2^{[1]} \to LH) &= && \Gamma(^3P_2^{[1]} \to gg) \Big\{ 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} [-4C_F \\
&+ && C_A \left(\frac{2185}{216} - \frac{337}{384}\pi^2 + \frac{5}{3}\ln 2 \right) + 2b_0 \ln\frac{\mu}{2m} \Big] \Big\} \\
&+ && n_f \alpha_s^3 \frac{8}{9} C_F \left(-\frac{29}{15} - \ln\frac{\mu_\Lambda}{2m} \right) \frac{\langle H|\mathcal{O}_1(^3P_2)|H\rangle}{m^4}, \quad (3.50)
\end{aligned}
$$

in cui $b_0 = \frac{11}{6}C_A - \frac{2}{3}T_F n_f = \frac{9}{2}$ (nel caso del charmonio) e μ_Λ è il cutoff ultravioletto della teoria. I coefficienti di colore sono definiti in Appendice A.

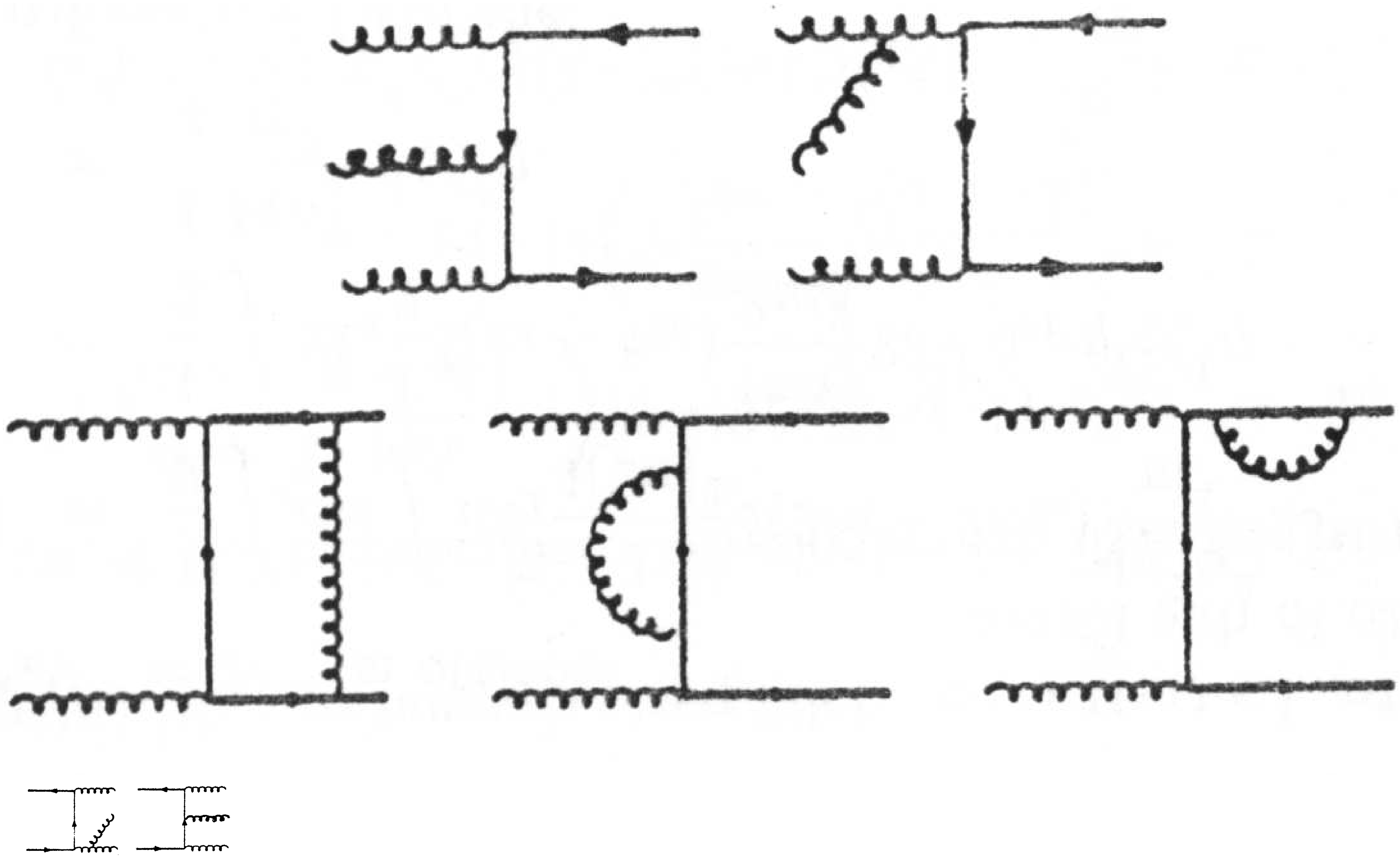


Figura 3.6: Esempi di correzioni virtuali (sopra) e reali (sotto) per l'ampiezza di decadimento.

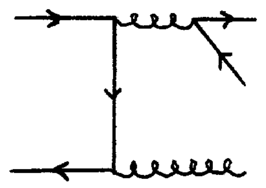


Figura 3.7: Correzione reale dovuta al decadimento in $q\bar{q}g$.

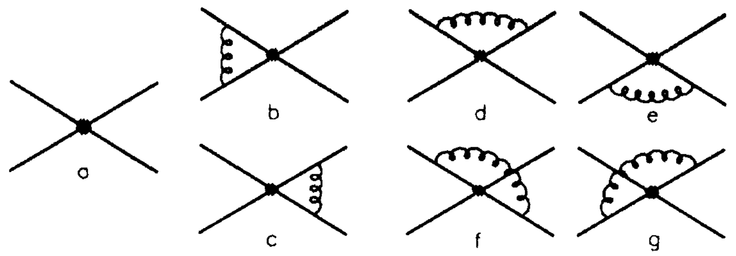


Figura 3.8: Correzioni NLO per le ampiezze di decadimento in NRQCD.

Capitolo 4

Elementi di matrice e larghezza della h_c

Gli elementi di matrice non perturbativi $\langle \mathcal{O}_1 \rangle$ e $\langle \mathcal{O}_8 \rangle$ possono essere determinati mediante calcoli su reticolo (ved. ad es. [19]) o attraverso un confronto con i dati sperimentali. In quanto segue questo secondo metodo viene utilizzato per determinare, all'ordine v^2, gli elementi di matrice per il charmonio in onda P.

La larghezza della h_c, lo stato ${}^1P_1$ del charmonio, non è ancora stata misurata anche se esiste un limite superiore pari a $\Gamma_{h_c} \leq 1.1$ MeV al livello di confidenza del 90% [20]. Per una comprensione completa del charmonio e per poter verificare i modelli che lo descrivono sarebbe estremamente interessante riuscire a misurare tutte le caratteristiche dello spettro; in tale senso sono utili le previsioni teoriche che possono essere effettuate. Gli elementi di matrice determinati vengono utilizzati direttamente per ottenere una stima di tale larghezza.

4.1 Elementi di matrice

Gli elementi di matrice non perturbativi vengono determinati attraverso un confronto della teoria con i dati sperimentali disponibili. Le espressioni teoriche utilizzate sono quelle per il decadimento in adroni e in $\gamma\gamma$ delle ${}^3P_J$. Per i decadimenti adronici queste si trovano in letteratura calcolate al LO in v e al NLO in α_s [4]. Per i decadimenti in $\gamma\gamma$ invece si possono utilizzare le espressioni (1.5)(1.6) in cui $|\Psi(0)|^2$ deve essere sostituito con l'equivalente nel nostro formalismo attraverso le (2.38)(2.39). Qui sotto rappresentiamo le espressioni teoriche viste nel capitolo precedente, in cui abbiamo posto il cutoff ultravioletto $\mu_\Lambda = 2m_c$, in forma più compatta:

$$\begin{aligned}
\Gamma(\chi_J \to LH) &= \pi\alpha_s^2 A_J \frac{\langle\chi_J|\mathcal{O}_1(^3P_J)|\chi_J\rangle}{m_c^4}(1+\frac{\alpha_s}{\pi}B_J) \\
&+ \alpha_s^3 B'_J \frac{\langle\chi_J|\mathcal{O}_1(^3P_J)|\chi_J\rangle}{m_c^4} \\
&+ \pi\alpha_s^2 \frac{\langle\chi_J|\mathcal{O}_8(^3S_1)|\chi_J\rangle}{m_c^2}(1+\frac{\alpha_s}{\pi}D) \\
&+ \alpha_s^3 D' \frac{\langle\chi_J|\mathcal{O}_8(^3S_1)|\chi_J\rangle}{m_c^2} \qquad (J=0,2) \qquad (4.1)\\
\Gamma(\chi_1 \to LH) &= \alpha_s^3 B_1 \frac{\langle\chi_1|\mathcal{O}_1(^3P_1)|\chi_1\rangle}{m_c^4} \\
&+ \pi\alpha_s^2 \frac{\langle\chi_1|\mathcal{O}_8(^3S_1)|\chi_1\rangle}{m_c^2}(1+\frac{\alpha_s}{\pi}D) \\
&+ \alpha_s^3 \frac{\langle\chi_1|\mathcal{O}_8(^3S_1)|\chi_1\rangle}{m_c^2} D' \qquad (4.2)\\
\Gamma(\chi_J \to \gamma\gamma) &= \pi e_c^4 \alpha_{em}^2 A_J^{\gamma\gamma} \frac{\langle\chi_J|\mathcal{O}_1(^3P_J)|\chi_J\rangle}{m_c^4}(1+\frac{\alpha_s}{\pi}B_J^{\gamma\gamma})(J=0,2) \qquad (4.3)\\
\Gamma(\chi_1 \to \gamma\gamma) &= 0 \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

$$A_0 = 8 \quad B_0 = 15.8 + L \quad B'_0 = -17.2$$

$$A_2 = 2.13 \quad B_2 = 2.49 + L \quad B'_2 = -6.87$$

$$B_1 = -4.68$$

$$D = 10.15 + L \quad D' = 0.197$$

$$A_0^{\gamma\gamma} = 36 \quad B_0^{\gamma\gamma} = 0.179$$

$$A_2^{\gamma\gamma} = 9.61 \quad B_2^{\gamma\gamma} = -5.33$$

$$L = 9\ln(\frac{\mu}{2m_c})$$

La quantità di dati sperimentali disponibili sulle larghezze di decadimento non è molto grande. Inoltre si ha una grande preponderanza di misure per le

DECADIM.	DATO ± ERR.	ESPER.	RIF.
$\Gamma(\chi_0 \to LH)$	$13.5 \pm 3.3 \pm 4.2$ MeV	CBAL	[21]
$\Gamma(\chi_0 \to LH)$	15.0 ± 4.9 MeV	E835	[22]
$\Gamma(\chi_1 \to LH)$	0.64 ± 0.10 MeV	E760	[23]
$\Gamma(\chi_2 \to LH)$	1.71 ± 0.21 MeV	E760	[23]
$\Gamma(\chi_0 \to \gamma\gamma)$	4.0 ± 2.8 keV	CBAL	[24]
$\Gamma(\chi_0 \to \gamma\gamma)$	$1.7 \pm 0.6 \pm 0.4 \pm 0.3$ keV	CLEO II	[25]
$\Gamma(\chi_2 \to \gamma\gamma)$	$0.7 \pm 0.2 \pm 0.1 \pm 0.2$ keV	CLEO II	[25]
$\Gamma(\chi_2 \to \gamma\gamma)$	$0.321 \pm 0.078 \pm 0.054$ keV	E760	[26]
$\Gamma(\chi_2 \to \gamma\gamma)$	$0.99^{+0.43}_{-0.37} \pm 0.36$ keV	L3	[27]
$\Gamma(\chi_2 \to \gamma\gamma)$	$3.4 \pm 1.7 \pm 0.9$ keV	TPC	[28]
$\Gamma(\chi_2 \to \gamma\gamma)$	$1.76 \pm 0.47 \pm 0.37 \pm 0.15$ keV	OPAL	[29]
$\Gamma(\chi_2 \to \gamma\gamma)$	0.44 ± 0.08 keV	E835	[22]

Tabella 4.1: Dati sperimentali

larghezze fotoniche rispetto a quelle in adroni; in più queste ultime presentano in genere errori maggiori. I dati utilizzati sono raccolti in Tabella 4.1.

C'è da precisare che i dati per $\Gamma(\chi_J \to LH)$ derivano da misure della larghezza totale, da cui viene sottratta la parte di decadimento radiativo utilizzando i valori dei rapporti di decadimento che si trovano in [8].

I parametri del problema sono 4:

- $O_1 = \frac{\langle\chi_J|\mathcal{O}_1(^3P_J)|\chi_J\rangle}{m_c^4}$;
- $O_8 = \frac{\langle\chi_J|\mathcal{O}_8(^3S_1)|\chi_J\rangle}{m_c^2}$;
- $S = \frac{\mu}{2m_c}$ (dove μ è la scala alla quale si utilizza la costante di accoppiamento forte $\alpha_s(\mu)$ nel processo di decadimento);
- α_s.

I primi due hanno le dimensioni di un'energia, gli altri due sono adimensionali. Nelle espressioni (4.1)(4.2)(4.3)(4.4) si vede bene che in questo modo m_c non è un parametro perchè esso non compare al di fuori delle combinazioni considerate.

S	0.5	0.75	1.0
α_s	0.320 ± 0.026	0.284 ± 0.023	0.264 ± 0.021
O_1(MeV)	2.67 ± 0.28	2.37 ± 0.26	2.26 ± 0.25
O_8(MeV)	2.35 ± 0.33	2.04 ± 0.39	1.99 ± 0.42
χ^2	14.8	14.1	14.5

Tabella 4.2: Variazione dei 3 parametri sulla scala di valori per S.

Qui diviene chiara la grande utilità dell'approssimazione di saturazione del vuoto: in linea di principio si potrebbe fare il fit basandosi unicamente sulle larghezze adroniche (4.1)(4.2) ma ciò è in pratica impedito dalla scarsità di dati disponibili (4 valori sperimentali e 3 parametri da determinare).

Per μ non esiste una scelta univoca. Esso deve ragionevolmente assumere un valore all'interno di un intervallo di rilevanza fisica; tipicamente possono essere scelti $m_c/2$, m_c, $2m_c$. A questo proposito è necessaria un'osservazione: nel caso del charmonio la scala $m_c/2$ comporta un valore di α_s piuttosto grande ($\alpha_s \simeq 0.46$), quindi in tal caso una trattazione perturbativa in α_s non è ben giustificata. In quanto segue considereremo la variazione di α_s che si ottiene corrispondentemente ai valori di μ contenuti nell'intervallo $[m_c, 2m_c]$.

Per il fit abbiamo minimizzato il χ^2 che si ottiene utilizzando i dati in Tabella 4.1:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(\Gamma_{teorica}(i) - \Gamma_{sperimentale}(i))^2}{\sigma(i)^2}, \tag{4.5}$$

dove i indica i vari dati sperimentali.

La strategia per la determinazione degli elementi di matrice è la seguente:

- si esegue un fit dei 3 parametri O_1, O_8, α_s per diversi valori di S. I risultati sono mostrati in tabella 4.2. Gli errori indicati sono quelli ottenuti nel processo di minimizzazione attraverso MINUIT [30].

- considerato che i valori di α_s determinati nel fit precedente sono compatibili con quelli che si ricavano estrapolando teoricamente il valore di $\alpha_s(\mu)$ dal valore di LEP $\alpha_s(M_Z) = 0.119 \pm 0.002$ [8], si può utilizzare direttamente il valore teorico di $\alpha_s(\mu)$ e fare un fit dei soli O_1 e O_8. In tutto ciò che segue abbiamo utilizzato questo approccio.

Ricalcolando le larghezze di decadimento con i valori di α_s, O_1, O_8 ottenuti in corrispondenza del minimo di χ^2 attraverso le relative espressioni

	ESP. $\pm$ ERR. (MeV)	TEO. (MeV)	$\frac{(\text{TEO.}-\text{ESP.})}{\text{ERR.}}$
$\Gamma(\chi_0 \to LH)$	14.3 ± 3.6	10.9	-0.97
$\Gamma(\chi_1 \to LH)$	0.64 ± 0.1	0.62	-0.20
$\Gamma(\chi_2 \to LH)$	1.71 ± 0.21	1.80	0.43
$\Gamma(\chi_0 \to \gamma\gamma)$	$(1.9 \pm 0.8) \cdot 10^{-3}$	$2.9 \cdot 10^{-3}$	1.3
$\Gamma(\chi_2 \to \gamma\gamma)$	$(0.43 \pm 0.06) \cdot 10^{-3}$	$0.38 \cdot 10^{-3}$	-0.83

Tabella 4.3: Calcolo delle Γ attraverso gli elementi di matrice.

μ	m_c	$1.5m_c$	$2m_c$
α_s	0.363	0.289	0.253
O_1(MeV)	2.60	2.37	2.28
O_8(MeV)	2.01	1.98	2.20
χ^2	17.6	14.1	14.8

Tabella 4.4: Variazione di O_1 e O_8 sulla scala di valori fisicamente plausibili per α_s.

teoriche si ottengono i risultati in Tabella 4.3, in cui al posto delle misure sperimentali sono state inserite le medie pesate.

In seguito sono stati eseguiti alcuni fit a 2 parametri per diversi valori di α_s (fissati), in modo da poter osservare la variazione degli elementi di matrice su tutta la scala. I risultati sono riassunti in Tabella 4.4. La variazione di O_1 e O_8 sull'intervallo considerato è del 10%. Essendo presenti 9 gradi di libertà si ha che: $\chi^2/g.d.l. \simeq 1.6$; questo valore è leggermente elevato a causa delle differenze di quasi una deviazione standard che si hanno tra i valori teorici e quelli sperimentali, come mostrato in Tabella 4.3, soprattutto nel caso dei decadimenti della χ_0.

Infine è possibile calcolare la derivata della funzione d'onda L=1 nell'origine; assegnando un valore di $m_c = 1.5$ GeV:

$$\begin{aligned} |R_P'|^2 &= \frac{4\pi}{3}\langle\chi_{cJ}|\mathcal{O}_1(^3P_J)|\chi_{cJ}\rangle \\ &= \frac{4\pi}{3}\, O_1\, m_c^4 = 0.050 \pm 0.006 \text{ GeV}^5. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Esso può essere paragonato con i valori in letteratura [30]; nel caso del potenziale di Buchmüller-Tye, per il quale il valore della massa del quark risulta essere pari a quello da noi adottato, si ottiene $|R_P'|^2 = 0.08$ GeV^5. La nostra stima per $|R_P'|^2$ risulta essere inferiore a tale valore, anche se dello stesso ordine di grandezza.

4.2 Calcolo di $\Gamma(h_c)$

Gli elementi di matrice trovati possono essere utilizzati per calcolare la larghezza adronica dell'h_c. L'espressione teorica è stata calcolata da Huang e Chao [5] e, indipendentemente, da Maltoni [31]. Il coefficiente $-118/48$ presente nella formula (18) di [5] è stato ricontrollato dagli autori; per ottenere l'espressione corretta esso deve essere sostituito con $-112/48$ [32]. In tal modo le due espressioni coincidono. Si ha:

$$\Gamma(h_c \to LH) = \Gamma(^1P_1^{[1]} \to LH) + \Gamma(^1S_0^{[8]} \to LH) + O(v^2\Gamma), \quad (4.7)$$

$$\Gamma(^1P_1^{[1]} \to LH) = \alpha_s^3 B_h \frac{\langle h_c|\mathcal{O}_1(^1P_1)|h_c\rangle}{m_c^4}, \quad (4.8)$$

$$\Gamma(^1S_0^{[8]} \to LH) = \pi\alpha_s^2 C_h \frac{\langle h_c|\mathcal{O}_8(^1S_0)|h_c\rangle}{m_c^2}(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} D_h), \quad (4.9)$$

$$B_h = -2.65 \quad C_h = 0.833 \quad D_h = 13.7 + L$$

Gli errori nella stima sono dovuti ai seguenti motivi:

- le formule utilizzate sono corrette all'ordine v^2. Ciò che viene in tal modo trascurato non è valutabile teoricamente ma è ragionevole associare a tale causa un errore del 25%;
- la variazione di $\Gamma(h_c \to LH)$ nell'intervallo fisicamente plausibile per α_s è del 33%;
- gli errori su O_1 e O_8 forniti da MINUIT sono entrambi del 10%.

In Tabella 4.6 è mostrata l'evoluzione di $\Gamma(h_c \to LH)$ con α_s. Il risultato, scegliendo come valore centrale quello calcolato con i parametri ottenuti in corrispondenza al χ^2 minimo di Tabella 4.4, è:

$$\Gamma(h_c \to LH) = (0.72 \pm 0.32) \text{ MeV}. \quad (4.10)$$

Per ottenere $\Gamma(h_c)$ si deve aggiungere la parte radiativa del decadimento (tutti gli altri contributi possono essere trascurati). Essa è stata stimata nel

correzioni in v^2	25%
err. su O_1	10%
err. su O_8	10%
variazione di Γ con α_s	33%
TOT.	44%

Tabella 4.5: Diversi contributi all'errore.

α_s	0.363	0.289	0.253
$\Gamma(h_c \to LH), NLO$	0.96	0.72	0.68

Tabella 4.6: Variazione di $\Gamma(h_c \to LH)$ sulla scala di valori fisicamente plausibili per α_s.

capitolo 1 (1.13):

$$\begin{aligned}\Gamma(h_c) &= \Gamma(h_c \to LH) + \Gamma(h_c \to \eta_c \gamma) \\ &= 1.2 \pm 0.3 \text{ MeV}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Per la $\Gamma(h_c)$ è stato dato sperimentalmente un limite superiore [20]:

$$\Gamma(h_c) \leq 1.1 \text{ MeV}, \quad 90\%\text{C.L.}.$$

La nostra stima 4.11 risulta essere compatibile con tale valore. Essa indica che scendendo anche di poco al di sotto del limite raggiunto si dovrebbe ottenere un segnale osservabile.

Conclusioni

In questo lavoro abbiamo determinato gli elementi di matrice non perturbativi per gli stati del charmonio in onda P, nell'ambito della fattorizzazione NRQCD, attraverso un confronto con i dati sperimentali oggi disponibili. Questo studio è di grande attualità perchè solo di recente sono state pubblicate tutte le espressioni teoriche per le larghezze di decadimento al NLO in α_s.

Gli elementi di matrice calcolati sono stati in seguito utilizzati per fornire una stima della larghezza di decadimento in adroni leggeri del mesone h_c. Tale stima, seppur affetta da errori abbastanza elevati (44%), è quanto di meglio si possa ricavare dall'odierna conoscenza della spettroscopia del charmonio. Essa è:

$$\Gamma(h_c \to LH) = (0.72 \pm 0.32) \text{ MeV}.$$

La h_c è nota con minor precisione rispetto agli altri stati del charmonio; per la sua larghezza esiste solo un limite superiore, determinato nel 1992 dall'esperimento E760 al Fermilab [20].

È auspicabile che i prossimi esperimenti di spettroscopia del charmonio vengano rivolti alla determinazione di $\Gamma(h_c)$. In particolare, questo è uno degli obiettivi principali dell'esperimento E835 al Fermilab nella prosecuzione del periodo di presa dati del 1999-2000.

Appendice A

Algebra di colore

Nella discussione del metodo di calcolo sono stati utilizzati dei coefficienti derivanti direttamente dalle proprietà del gruppo $SU(3)$ del colore. Per comodità essi vengono riassunti nel seguito.

I generatori di $SU(3)$ sono le matrici:

$$T^a = \lambda^a/2 \qquad\qquad (a = 1, ..., 8),$$

dove le λ^a sono le matrici di Gell-Mann:

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Valgono le relazioni di commutazione:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$$

e di anticommutazione:

$$\{T^a, T^b\} = d^{abc} T^c + \delta^{ab}/3,$$

con f^{abc} antisimmetrici e d^{abc} simmetrici.

Per un gruppo $SU(N)$ definiamo:

$$\delta^{ab} C_A = \sum_{cd} f^{acd} f^{bcd},$$

$$\delta_{ik} C_F = \left(\sum_a T^a T^a \right)_{ik} = \sum_{al} T^a_{il} T^a_{lk},$$

$$\delta^{ab} T_F = \mathrm{Tr} T^a T^b = \sum_{ki} T^a_{ik} T^b_{ki},$$

$$\delta^{ab} 4 B_F = \sum_{cd} d^{acd} d^{bcd}.$$

I coefficienti, per $N = N_c = 3$, assumono i valori:

$$C_A = N_c = 3, \quad C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} = \frac{4}{3}, \quad T_F = \frac{1}{2}, \quad B_F = \frac{N_c^2 - 4}{4N_c} = \frac{5}{12}.$$

Alcune relazioni utili sono:

$$\mathrm{Tr}(T^a T^b T^c) = \frac{1}{4}(i f^{abc} + d^{abc}),$$

$$\sum_a T^a_{ji} T^a_{lk} = -\frac{1}{2N_c} \delta_{ij} \delta_{lk} + \frac{1}{2} \delta_{ik} \delta_{lj},$$

$$\sum_{abc} d^2_{abc} = \frac{40}{3}, \qquad \sum_{abc} f^2_{abc} = 24.$$

Appendice B

Il teorema di Yang

B.1 $J = 1 \not\to \gamma\gamma$

Il teorema di Yang afferma che una particella di spin 1 non può decadere in due fotoni.

Per dimostrarlo consideriamo un sistema di due fotoni con $J = 1$; per rotazioni spaziali esso deve avere le stesse proprietà di trasformazione delle tre componenti di un vettore. Per indicarle utilizziamo un indice $i = 1, 2, 3$.

$$|\gamma\gamma\rangle_i = \int d^3p \chi_{ijk} a_j^\dagger(\mathbf{p}) a_k^\dagger(-\mathbf{p})|0\rangle$$

χ_{ijk} è un generico tensore di rango 3 sotto rotazioni spaziali; esso deve dipendere unicamente da $\mathbf{p}$. La sua forma più generale è:

$$\begin{aligned}
\chi_{ijk} &= A\epsilon_{ijk} + Bp_i\delta_{jk} + Cp_j\delta_{ki} + Bp_k\delta_{ij} \\
&+ B'p_i\epsilon_{jkl}p_l + C'p_j\epsilon_{kil}p_l + D'p_k\epsilon_{ijl}p_l \\
&+ Ep_ip_jp_k
\end{aligned}$$

con $A, B, ..., E$ funzioni solo di $|\mathbf{p}|$.

Per il fatto che $p_i a_i^\dagger = 0$ molte componenti di χ_{ijk} non contribuiscono a $|\gamma\gamma\rangle_i$. Definiano un nuovo tensore $\chi'_{ijk}(\mathbf{p})$ che, applicato a $a_j^\dagger(\mathbf{p})a_k^\dagger(-\mathbf{p})|0\rangle$ ha lo stesso effetto di $\chi_{ijk}(\mathbf{p})$:

$$\chi'_{ijk}(\mathbf{p}) = A\epsilon_{ijk} + Bp_i\delta_{jk} + B'p_i\epsilon_{jkl}p_l.$$

Esso ha la proprietà:

$$\chi'_{ijk}(\mathbf{p}) = -\chi'_{ikj}(-\mathbf{p}).$$

Si ottiene che:

$$|\gamma\gamma\rangle_i = \int d^3p - \chi'_{ikj}(-\mathbf{p})a_j^\dagger(\mathbf{p})a_k^\dagger(-\mathbf{p})|0\rangle. \tag{B.1}$$

Siccome i due fotoni obbediscono alla statistica di Bose si può eseguire la commutazione dei due operatori di creazione:

$$|\gamma\gamma\rangle_i = \int d^3p\chi'_{ijk}(\mathbf{p})a_k^\dagger(-\mathbf{p})a_j^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$$

e ridefinendo $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$, $(j,k) \to (k,j)$ si ottiene:

$$|\gamma\gamma\rangle_i = \int d^3p\chi'_{ikj}(-\mathbf{p})a_j^\dagger(\mathbf{p})a_k^\dagger(-\mathbf{p})|0\rangle. \tag{B.2}$$

Dal confronto di (B.1) e (B.2) si ottiene che $|\gamma\gamma\rangle_i = 0$, ossia non è possibile avere due fotoni con momento angolare totale $J = 1$.

B.2 $J = 1 \to gg$

Considerando l'annichilazione di una coppia quark-antiquark in due gluoni bisogna prendere in considerazione anche la simmetria della parte di colore. Questa volta lo stato finale è:

$$|gg\rangle_i^{(1,c)} = \int d^3p\chi'_{ijk}(\mathbf{p})\mathcal{C}^{ab}a_j^{\dagger a}(\mathbf{p})a_k^{\dagger b}(-\mathbf{p})|0\rangle, \tag{B.3}$$

dove $\mathcal{C}$ è un generico tensore che specifica la simmetria per lo scambio degli indici di colore dei due gluoni, l'indice $(1,c)$ identifica lo stato di singoletto o ottetto di colore.

Per la parte spaziale si procede esattamente come nel caso dei due fotoni; commutando i due gluoni si ottiene:

$$\begin{aligned} |gg\rangle_i^{(1,c)} &= \int d^3p\chi'_{ijk}(\mathbf{p})\mathcal{C}^{ab}a_k^{\dagger b}(-\mathbf{p})a_j^{\dagger a}(\mathbf{p})|0\rangle \\ &= \int d^3p\chi'_{ikj}(-\mathbf{p})\mathcal{C}^{ab}a_j^{\dagger b}(\mathbf{p})a_k^{\dagger a}(-\mathbf{p})|0\rangle \\ &= \int d^3p - \chi'_{ijk}(\mathbf{p})\mathcal{C}^{ab}a_j^{\dagger b}(\mathbf{p})a_k^{\dagger a}(-\mathbf{p})|0\rangle. \end{aligned} \tag{B.4}$$

A questo punto si deve scrivere l'espressione più generale per il tensore $\mathcal{C}^{ab}$; tenendo presente che per lo studio dell'annichilazione $Q\bar{Q}$ siamo interessati unicamente agli stati di singoletto o ottetto di colore totale esso è (inserendo gli indici di colore r,s):

$$\mathcal{C}^{ab}_{rs}=L\delta^{ab}\delta_{rs}+MT^c_{rs}d^{cab}+NT^c_{rs}f^{cab}$$

che, proiettato sul singoletto, è totalmente simmetrico:

$$\mathcal{C}^{ab}_1=L'\delta^{ab},$$

nel caso dell'ottetto invece si ottiene:

$$\mathcal{C}^{cab}_8=M'd^{cab}+N'f^{cab}.$$

Inserendo queste espressioni nella (B.4), scambiando gli indici di colore e sommando con (B.3), si ottiene che non può esistere uno stato di due gluoni con $J=1$ in singoletto di colore, pertanto il teorma di Yang vale in modo esattamente analogo al caso del decadimento in fotoni.

Nel caso in cui i due gluoni si trovino in uno stato di ottetto di colore si ottiene:

$$\begin{aligned}|gg\rangle^c_i &= -\int d^3p\chi'_{ijk}(\mathbf{p})(Md^{cab}+Nf^{cab})a^{\dagger b}_j(\mathbf{p})a^{\dagger a}_k(-\mathbf{p})|0\rangle\\ &= -\int d^3p\chi'_{ijk}(\mathbf{p})(Md^{cba}+Nf^{cba})a^{\dagger a}_j(\mathbf{p})a^{\dagger b}_k(-\mathbf{p})|0\rangle\end{aligned}$$

che, sommata a (B.3), dà:

$$\begin{aligned}|gg\rangle^c_i &= \int d^3p\chi'_{ijk}(\mathbf{p})(Md^{cab}+Nf^{cab}-Md^{cba}-Nf^{cba})a^{\dagger a}_j(\mathbf{p})a^{\dagger b}_k(-\mathbf{p})|0\rangle\\ &= \int d^3p\chi'_{ijk}(\mathbf{p})(2Nf^{cab})a^{\dagger a}_j(\mathbf{p})a^{\dagger b}_k(-\mathbf{p})|0\rangle, \qquad \text{(B.5)}\end{aligned}$$

che in generale non si annulla. Pertanto uno stato $J=1$ di ottetto di colore può decadere in due gluoni.

Bibliografia

[1] G.T. Bodwin, E. Braaten and G.P. Lepage; Phys. Rev. **D51** (1995) 1125 - Erratum; Phys. Rev. **D55** (1997) 5853

[2] G. Schuler; hep-ph/9403387

[3] M.L. Mangano and A. Petrelli; Phys. Lett. **B352** (1995) 445

[4] A. Petrelli et al.; Nucl. Phys. **B514** (1998) 245

[5] H.-W. Huang and K.-T. Chao; Phys. Rev. **D54** (1996) 3065; Erratum; Phys. Rev. **D56** (1997) 7472

[6] J.J. Aubert et al. Phys. Rev. Lett. **33** (1974) 1404

[7] J. Augustin et al.; Phys. Rev. Lett. **33** (1974) 1406

[8] C. Caso et al.; Eur. Phys. J. **C3** (1998) 1

[9] R. Cester and P. Rapidis; Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **44** (1994) 329

[10] D.H. Perkins; Introduction to High Energy Physics - Third Edition, Addison-Wesley (1987)

[11] W. Kwong, J.L. Rosner and C. Quigg; Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **37** (1987) 325

[12] W. Kwong et al.; Phys. Rev. **D37** (1988) 3210

[13] R. Van Royen and V.F. Weisskopf; Nuovo Cim. **50** (1967) 617; Nuovo Cim. **51** (1967) 583

[14] C.N. Yang; Phys. Rev. **77** (1950) 242

[15] E. Braaten, S. Fleming and T.C. Yuan; Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **46** (1996) 197

[16] F.J. Ynduráin; The Theory of Quark and Gluon Interactions - Second Edition, Springer-Verlag (1993)

[17] E. Braaten and Y.-Q. Chen; Phys. Rev. **D54** (1996) 3216

[18] E. Braaten and Y.-Q. Chen; Phys. Rev. **D55** (1997) 7152

[19] G.T. Bodwin, D.K. Sinclair and S. Kim; Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 2376; Int. J. Mod. Phys. **A12** (1997) 4019

[20] T.A. Armstrong et al.; Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 2337

[21] J. Gaiser et al.; Phys. Rev. **D34** (1986) 711

[22] E835 collaboration; proceeding di LEAP 98 Biennal Conference on Low Energy Antiproton Physics, presentato da R. Calabrese

[23] T.A. Armstrong et al.; Nucl. Phys. **B373** (1992) 35

[24] Lee et al.; SLAC 282 (1985)

[25] V. Savinov and R. Fulton; hep-ex/9507006

[26] T.A. Armstrong et al.; Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 2988

[27] L3 coll.; L3 note 2297 (1998)

[28] Bauer et al.; Phys. Lett. **B302** (1993) 345

[29] OPAL coll.; cern-ep/98-106 (1998)

[30] F. James and M. Roos; MINUIT Reference Manual, CERN (1992)

[30] E.J. Eichten and C. Quigg; Phys. Rev. **D52** (1995) 1796

[31] F. Maltoni; comunicazione personale

[32] H.-W. Huang; comunicazione personale

Ringraziamenti

Desidero ringraziare i miei relatori Diego Bettoni e Luca Caneschi per la disponibilità dimostrata costantemente nei miei confronti e per i consigli, sempre ottimi, che hanno saputo fornirmi.

Un ringraziamento particolare a Fabio Maltoni, con cui ho avuto il piacere di discutere sui più diversi argomenti inerenti questa tesi (e non solo). La sua impronta è senz'altro rimasta impressa su diverse di queste pagine; ciò mi rende immensamente felice.

Questo lavoro conclude un periodo in cui ho avuto vicino parecchi amici, vecchi e nuovi. Senza di loro questo lungo viaggio sarebbe stato molto più duro. Nella convinzione che l'elenco non entrerebbe nella pagina, mi scuso con tutti coloro che ho trascurato ultimamente, con la promessa di rimediare al più presto.

Infine ricordo i miei famigliari e tutti coloro che in qualche modo mi hanno sostenuto e hanno avuto fiducia in me.

Grazie.